

Tema 5: Aplicaciones del cálculo en varias variables

17 de diciembre de 2002

1. Funciones vectoriales. Curvas parametrizadas

Definición 1 Una función vectorial de variable real es una aplicación $\mathbf{f}: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esta función \mathbf{f} viene dada por n funciones reales de variable real, $f_i: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$; escribiremos $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$

Definición 2 Sea $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n): D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Ac}(D)$; decimos que el límite de \mathbf{f} en a es $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ si

$$\lim_{t \rightarrow a} f_i(t) = v_i \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n;$$

y en tal caso escribimos: $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{v}$.

Definición 3 Sea $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n): D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

1. Decimos que \mathbf{f} es continua en $a \in D$ si todas las funciones f_i son continuas en a ; es decir, si $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(a)$.
2. Decimos que \mathbf{f} es derivable en $a \in D$ si todas las funciones f_i son derivables en a y llamamos derivada de \mathbf{f} en a al vector: $\mathbf{f}'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a))$.

Proposición 4 Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos funciones vectoriales derivables, $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real derivable y $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar; entonces:

1. $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ es derivable y $(\mathbf{f} + \mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}'$.
2. $\phi \mathbf{f}$ es derivable y $(\phi \mathbf{f})' = \phi' \mathbf{f} + \phi \mathbf{f}'$.
3. $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ (producto escalar) es derivable y $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}'$.
4. Para funciones sobre \mathbb{R}^3 : $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ (producto vectorial) es derivable y $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \mathbf{g}'$.

5. Regla de la cadena: $\mathbf{f} \circ \phi$ es derivable y $(\mathbf{f} \circ \phi)'(t) = \mathbf{f}'(\phi(t))\phi'(t)$.

$h \circ \mathbf{f}$ es derivable y $(h \circ \mathbf{f})' = h'(\mathbf{f}(t)) \cdot \mathbf{f}'(t)$ (obsérvese que estamos usando el producto escalar).

1.1. Curvas parametrizadas

Ya hemos trabajado con conjunto de puntos en el plano o en el espacio que hemos denominado *curvas*; la gráfica de una función real de variable real es una curva y también lo son las curvas de nivel de un campo escalar en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, no disponemos de una noción general de curva que permita considerar los casos mencionados como casos particulares, y que en consecuencia establezca una coherencia entre los distintos usos de la palabra curva. La noción general de curva es la *curva parametrizada*.

Definición 5 Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es una curva parametrizada si existe un intervalo I y una función vectorial continua $\mathbf{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $C = \mathbf{f}(I)$. Las ecuaciones

$$x_1 = f_1(t), \quad \dots, \quad x_n = f_n(t) \quad t \in I$$

se denominan ecuaciones paramétricas de la curva y la variable t se denomina parámetro.

Debemos tener en cuenta que el concepto de curva corresponde al subconjunto de puntos y *no a la función vectorial*; de hecho, una curva admite muchas parametrizaciones distintas.

Las gráficas de las funciones reales de variable real son efectivamente curvas parametrizadas. Si $\phi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, la función vectorial

$$\mathbf{f}(t) = (t, \phi(t)), t \in I$$

es una parametrización del grafo de ϕ . El recíproco no es cierto, es decir, no todas las curvas parametrizadas en \mathbb{R}^2 pueden describirse como el grafo de una función real de variable real; por ejemplo, la curva parametrizada $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ es una circunferencia de radio 1 y centrada en el origen y no puede describirse como grafo.

La situación no es tan simple para el caso de las curvas de nivel, aunque también es cierto que las curvas de nivel de campos escalares en \mathbb{R}^2 diferenciables, también son curvas parametrizadas. Este hecho es consecuencia del teorema de la implícita que veremos más adelante, pero la justificación formal queda fuera de los objetivos de este curso; sin embargo, si describiremos algunas curvas asociadas a campos concretos.

Aunque hemos exigido solamente la condición de continuidad a la parametrización, lo habitual será trabajar con curvas *diferenciables*.

Definición 6 Una curva $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice diferenciable si admite una parametrización $\mathbf{f}(t)$ derivable; una parametrización así se dice parametrización diferenciable.

Una curva diferenciable puede tener parametrizaciones no diferenciables: $(\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{t^2})$ es una parametrización no diferenciable de la parábola $y = x^2$ que sí es una curva diferenciable.

La condición de continuidad asegura que la curva puede ser dibujada de un *solo trazo*, pero la condición de diferenciable no aporta ninguna característica geométrica a la curva. Sin embargo, la noción de regularidad que damos a continuación se traduce en la ausencia de *picos* en la curva.

Definición 7 Una curva $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice regular si admite una parametrización $\mathbf{f}(t)$ diferenciable y tal que $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t ; a una parametrización verificando las dos propiedades se le dice parametrización regular.

Una curva regular puede tener parametrizaciones no regulares: (t^3, t^6) es una parametrización no regular (pero sí diferenciable) de la parábola $y = x^2$ que sí es una curva regular.

La gráfica de la función $y = |x|$ es una curva diferenciable, ya que la parametrización $(x, y) = (t^3, |t|^3)$, $t \in \mathbb{R}$, es una parametrización diferenciable. Sin embargo, la curva no es regular, ya que cualquier parametrización deberá tener derivada $(0, 0)$ en el parámetro correspondiente al punto $(0, 0)$.

Definición 8 Una curva $C \subset \mathbb{R}^n$ diferenciable se dice regular a trozos si admite una parametrización \mathbf{f} regular en todos los puntos excepto en un conjunto finito.

Dado que una función vectorial continua, $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ determina completamente una curva en \mathbb{R}^n , es bastante frecuente llamar a estas funciones *curvas*, identificándolas con su imagen. De la misma forma, diremos que $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una *curva diferenciable* si es una parametrización diferenciable de su imagen; diremos que es una *curva regular* si es una parametrización regular de su imagen y diremos que es una *curva regular a trozos* si es una parametrización regular a trozos de su imagen.

Definición 9 Sea $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ una parametrización regular de la curva C ; la recta

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1(t_0) + \lambda x'_1(t_0) \\ X_2 &= x_2(t_0) + \lambda x'_2(t_0) \\ &\dots\dots \\ X_n &= x_n(t_0) + \lambda x'_n(t_0) \end{aligned}$$

se denomina *recta tangente a C en $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$* ; es decir, el vector $(x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0))$ es tangente a la curva en dicho punto.

Las nociones de curva *simple*, *curva cerrada* y *curva cerrada y simple* tendrán bastante importancia en los temas siguientes.

Definición 10 Una curva se dice simple si admite una parametrización inyectiva.

Definición 11 Una curva se dice cerrada si admite una parametrización continua definida en un intervalo cerrado, $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, y tal que $\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(b)$.

Definición 12 Una curva se dice que es cerrada y simple si admite una parametrización continua definida en

un intervalo cerrado, $\mathbf{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, inyectiva en $[a, b]$ y tal que $\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(b)$.

1.2. Trayectorias en \mathbb{R}^3 (NO)

Una función $\mathbf{f}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ puede ser entendida como la descripción del movimiento de una partícula en el espacio entendiendo que la variable de la función es el tiempo; es decir, si $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ dan las coordenadas en que se encuentra un móvil en el instante t .

Si \mathbf{f} es diferenciable, el vector $\mathbf{f}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ es el *vector velocidad* en el instante t . Si \mathbf{f}' es derivable, $\mathbf{f}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ es el vector aceleración.

Sea \mathbf{f} una curva en \mathbb{R}^3 dos veces derivable; si $\mathbf{f}'(t) \neq 0$, definimos el *vector tangente unitario* en $\mathbf{f}(t)$ al vector:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{f}'(t)}{\|\mathbf{f}'(t)\|}$$

Llamamos *vector normal unitario* en $\mathbf{f}(t)$ al vector:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

La utilidad de estos vectores está en que el vector aceleración de $\mathbf{f}(t)$ está en el plano formado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$; las componentes del vector aceleración respecto de estos vectores unitarios (y ortogonales entre sí) son muy importantes en física ya que permiten calcular las fuerzas de inercia y centrípeta. Si $\mathbf{f}''(t) = \mathbf{a}(t) = a_T(t)\mathbf{T}(t) + a_N(t)\mathbf{N}(t)$, entonces:

$$a_T(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}''(t)}{\|\mathbf{f}'(t)\|_2}$$

$$a_N(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t) = \frac{\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\|_2}{\|\mathbf{v}(t)\|_2}$$

El número $a_N(t)$ se denomina igualmente *curvatura* de \mathbf{f} .

2. Campos vectoriales

Definición 13 Una *campo vectorial* es una aplicación cuyo dominio está contenido en un espacio \mathbb{R}^n y su ima-

gen lo está en otro espacio \mathbb{R}^m ; es decir, responde al esquema $\mathbf{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Un campo vectorial está determinado por m campos escalares: $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$.

Definición 14 Dado $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ campo vectorial y $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \text{Ac}(\text{Dom}(\mathbf{f}))$, se dice que el límite cuando \mathbf{x} tiende a \mathbf{a} es $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_m)$ si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = \ell_i \quad \text{para cada } i = 1, \dots, m$$

y en tal caso lo denotamos $\boldsymbol{\ell} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Decimos que \mathbf{f} es continua en \mathbf{a} si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Definición 15 Un campo vectorial $\mathbf{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, se dice diferenciable en $\mathbf{a} \in D$ si cada uno de los campos f_i es diferenciable en \mathbf{a} ; en tal caso, llamamos matriz jacobiana de \mathbf{f} en \mathbf{a} a la matriz:

$$J\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{a}) & D_2 f_1(\mathbf{a}) & \dots & D_n f_1(\mathbf{a}) \\ D_1 f_2(\mathbf{a}) & D_2 f_2(\mathbf{a}) & \dots & D_n f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{a}) & D_2 f_m(\mathbf{a}) & \dots & D_n f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix}_{m \times n}$$

que se escribe igualmente de forma esquemática como:

$$J\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \\ \nabla f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Todas las propiedades algebraicas de la diferenciability son inmediatas y su enunciado y justificación se proponen como ejercicio; enunciamos solamente la *regla de la cadena*, que generaliza los enunciados previos de la misma.

Proposición 16 (Regla de la cadena) Si $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ son campos vectoriales diferenciables, entonces $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ es otro campo vectorial diferenciable y $J(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{a}) = J\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \cdot J\mathbf{g}(\mathbf{a})$.

En cada caso, la aplicación de la regla de la cadena da una serie de igualdades que permiten calcular las parciales de $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ a partir de las parciales de las componentes de \mathbf{f} y \mathbf{g} . Veamos estas igualdades en un tipo

concreto de composición. Si $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)$, $f \circ \mathbf{g}$ es un campo escalar en \mathbb{R}^n y la regla de la cadena da las siguientes ecuaciones: (las damos con las dos notaciones introducidas)

$$D_k(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{a}) = D_1 f(\mathbf{g}(\mathbf{a}))D_k g_1(\mathbf{a}) + D_2 f(\mathbf{g}(\mathbf{a}))D_k g_2(\mathbf{a}) + \dots + D_m f(\mathbf{g}(\mathbf{a}))D_k g_m(\mathbf{a})$$

$$\frac{\partial(f \circ \mathbf{g})}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\frac{\partial g_1}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\frac{\partial g_2}{\partial x_k}(\mathbf{a}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\frac{\partial g_m}{\partial x_k}(\mathbf{a})$$

2.1. Superficies parametrizadas

En la sección anterior hemos introducido el concepto de curva parametrizada en \mathbb{R}^n ; de la misma forma podemos definir una superficie parametrizada en espacio \mathbb{R}^n que generalice las nociones de superficie que hemos manejado para la gráfica de un campo escalar en \mathbb{R}^2 o para superficie de nivel de un campo en \mathbb{R}^3 . La definición que podemos tomar como punto de partida es la siguiente.

Consideremos una función vectorial $\mathbf{f}: B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde B es una bola; al conjunto imagen de esta función se le denomina *superficie parametrizada en \mathbb{R}^n* . Las ecuaciones

$$x_1 = f_1(t, s), \quad \dots \quad x_n = f_n(t, s)$$

se denominan *ecuaciones paramétricas de la superficie* y la variables t y s se denominan *parámetros*. Igual que para las curvas parametrizadas observamos que el concepto de superficie corresponde al subconjunto de puntos y *no al campo vectorial*; el campo vectorial nos da “una” parametrización de la superficie pero una superficie admite muchas parametrizaciones.

A diferencia de lo que ocurre con las curvas, el uso de bolas en el dominio de las parametrizaciones, hace que no todas las superficies puedan ser parametrizadas con un único campo vectorial, y que en la mayoría de

los casos tengamos que trabajar con uniones de parametrizaciones y con dominios más generales.

De la misma forma que para curvas parametrizadas, se puede introducir los conceptos de superficies diferenciales y regulares y la noción de plano tangente. Particularizamos estas últimas definiciones para superficies en \mathbb{R}^3 .

Definición 17 Sea $(x(t, s), y(t, s), z(t, s))$ una parametrización diferenciable de S . Decimos que es regular si para cada (t_0, s_0) , los vectores

$$(D_1 x(t_0, s_0), D_1 y(t_0, s_0), D_1 z(t_0, s_0)) \\ (D_2 x(t_0, s_0), D_2 y(t_0, s_0), D_2 z(t_0, s_0))$$

son linealmente independientes. En este caso, el plano generado por esos vectores,

$$X - x(t_0, s_0) = \lambda D_1 x(t_0, s_0) + \mu D_2 x(t_0, s_0) \\ Y - y(t_0, s_0) = \lambda D_1 y(t_0, s_0) + \mu D_2 y(t_0, s_0) \\ Z - z(t_0, s_0) = \lambda D_1 z(t_0, s_0) + \mu D_2 z(t_0, s_0)$$

se denomina *plano tangente a S en $(x(t_0, s_0), y(t_0, s_0), z(t_0, s_0))$* .

El grafo de un campo escalar diferenciable, $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, se puede parametrizar como:

$$(x, y, z) = (t, s, f(t, s)), \quad (t, s) \in D$$

El plano tangente a esta superficie (que es regular), es:

$$X - t_0 = \lambda \\ Y - s_0 = \mu \\ Z - f(t_0, s_0) = \lambda D_1 f(t_0, s_0) + \mu D_2 f(t_0, s_0)$$

Reduciendo los parámetros, obtenemos:

$$Z - f(t_0, s_0) = D_1 f(t_0, s_0)(X - t_0) + D_2 f(t_0, s_0)(Y - s_0)$$

Como en el caso de las curvas, las superficies de nivel no se estudian fácilmente como superficies parametrizadas, sin embargo, las propiedades estudiadas en el tema anterior permiten deducir una expresión para el plano tangente que no requiere el uso de parametrizaciones. Concretamente, vimos que, dado que las direcciones tangentes a una superficie (respect. curva) de

Función	Curva/Superficie	Recta/Plano tangente
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	Gráfica: curva que pasa por $(a, f(a))$	$Y - f(a) = f'(a)(X - a)$
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$	Imagen: curva que pasa por $f(a)$	$X - f_1(a) = \lambda f'_1(a)$ $Y - f_2(a) = \lambda f'_2(a)$
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$	Imagen: curva que pasa por $f(a)$	$X_1 - f'_1(a) = \lambda f'_1(a)$ \vdots $X_n - f'_n(a) = \lambda f'_n(a)$
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	Curva de nivel que pasa por a	$D_1 f(\mathbf{a})(X - a_1) + D_2 f(\mathbf{a})(Y - a_2) = 0$
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$	Imagen: superficie que pasa por $f(\mathbf{a})$	$X - f_1(\mathbf{a}) = \lambda D_1 f_1(\mathbf{a}) + \mu D_2 f_1(\mathbf{a})$ $Y - f_2(\mathbf{a}) = \lambda D_1 f_2(\mathbf{a}) + \mu D_2 f_2(\mathbf{a})$ $Z - f_3(\mathbf{a}) = \lambda D_1 f_3(\mathbf{a}) + \mu D_2 f_3(\mathbf{a})$
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$	Imagen: superficie que pasa por $f(\mathbf{a})$	$X_1 - f_1(\mathbf{a}) = \lambda D_1 f_1(\mathbf{a}) + \mu D_2 f_1(\mathbf{a})$ \vdots $X_n - f_n(\mathbf{a}) = \lambda D_1 f_n(\mathbf{a}) + \mu D_2 f_n(\mathbf{a})$
$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$	Superficie de nivel que pasa por \mathbf{a}	$D_1 f(\mathbf{a})(X - a_1) + D_2 f(\mathbf{a})(Y - a_2) + D_3 f(\mathbf{a})(Z - a_3) = 0$
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	Gráfica: superficie que pasa por $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$	$Z - f(\mathbf{a}) = D_1 f(\mathbf{a})(X - a_1) + D_2 f(\mathbf{a})(Y - a_2)$

Figura 1: Expresiones de las rectas y planos tangentes

nivel corresponden a la tasa variación nula del campo, y que estas direcciones son ortogonales al vector gradiente, entonces el vector gradiente es ortogonal al plano (respect. recta) de la superficie (respect. curva) de nivel. En particular, dado un campo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la recta tangente a la curva de nivel que pasa por un punto \mathbf{a} del dominio es

$$D_1f(\mathbf{a})(X - a_1) + D_2f(\mathbf{a})(Y - a_2) = 0$$

De la misma forma, dado un campo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, el plano tangente a la superficie de nivel que pasa por un punto \mathbf{a} del dominio es

$$D_1f(\mathbf{a})(X - a_1) + D_2f(\mathbf{a})(Y - a_2) + D_3f(\mathbf{a})(Z - a_3) = 0$$

Los grafos de campos escalares en \mathbb{R}^2 , pueden ser descritos como superficies de nivel, $f(x, y) - z = 0$, y por lo tanto, podemos obtener las expresiones de sus planos tangentes de una forma alternativa:

$$Z - f(a_1, a_2) = D_1f(a_1, a_2)(X - a_1) + D_2f(a_1, a_2)(Y - a_2)$$

En la figura 1 aparece una tabla resumen con las expresiones de los planos y rectas tangentes según la expresión dada.

2.2. Líneas de campo

Los únicos campos vectoriales para los cuales hemos introducido una representación gráfica son los campos de la forma $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. En esta sección vamos a introducir una representación parecida a las curvas de nivel para los campos $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: *las líneas de campo*.

Una primera representación de este tipo de funciones podría hacerse de la siguiente forma: en primer lugar elegimos una región del plano para la cual queremos hacer la representación; en segundo lugar cuadrículamos esta región; la representación gráfica consiste en representar sobre cada punto de corte de esta cuadrícula el vector imagen de este punto. La representación obtenida es un conjunto de vectores aplicados a una familia de puntos homogéneamente repartidos. Esta representación, por si sola, puede ser de bastante utilidad pero en muchos casos resulta poco interesante.

Una representación más conveniente, aunque no siempre fácil de realizar, se hace mediante las líneas de campo: una curva γ contenida en el dominio del campo $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una línea de campo, si tiene la propiedad: $\mathbf{f}(\gamma(t)) = \gamma'(t)$. Hallar las líneas de campo de un campo vectorial supone la resolución de un *sistema de ecuaciones diferenciales* cuyo estudio haremos posteriormente en el curso:

$$x'(t) = f_1(x(t), y(t))$$

$$y'(t) = f_2(x(t), y(t))$$

En la figura 2, aparece la representación de un campo vectorial usando líneas de campo.

2.3. Cambios de coordenadas

Una de las principales aplicaciones del cálculo en varias variables es el estudio de campos escalares y vectoriales aplicados al plano y al espacio físico; por ejemplo, para el estudio de campos de presiones, de temperaturas, electromagnéticos, ... Para estudiar matemáticamente estos campos, necesitamos, en primer lugar, identificar el plano físico con el espacio métrico \mathbb{R}^2 ; la forma más frecuente de realizar esta identificación es considerando un par de *ejes cartesianos* en el plano físico. De esta forma, cada punto del plano queda determinado *biunívocamente* por un elemento de \mathbb{R}^2 , y los campos sobre el plano pueden definirse mediante funciones de \mathbb{R}^2 . La misma situación se puede describir para campos escalares en el espacio.

Aparte de los ejes cartesianos, existen otros sistemas para modelar matemáticamente el plano y el espacio físico; en las secciones siguientes introducimos los más usados.

2.3.1. Coordenadas polares

Un sistema de representación polar para el plano se construye considerando una semirrecta R con extremo en un punto O . Las coordenadas polares de un punto P , respecto de este sistema, es un par de números, (r, θ) , en donde $r > 0$ es la distancia euclídea entre el punto P y el punto O y θ es el ángulo que forma el segmento OP y el eje R . La recta R se denomina *eje polar*, el punto

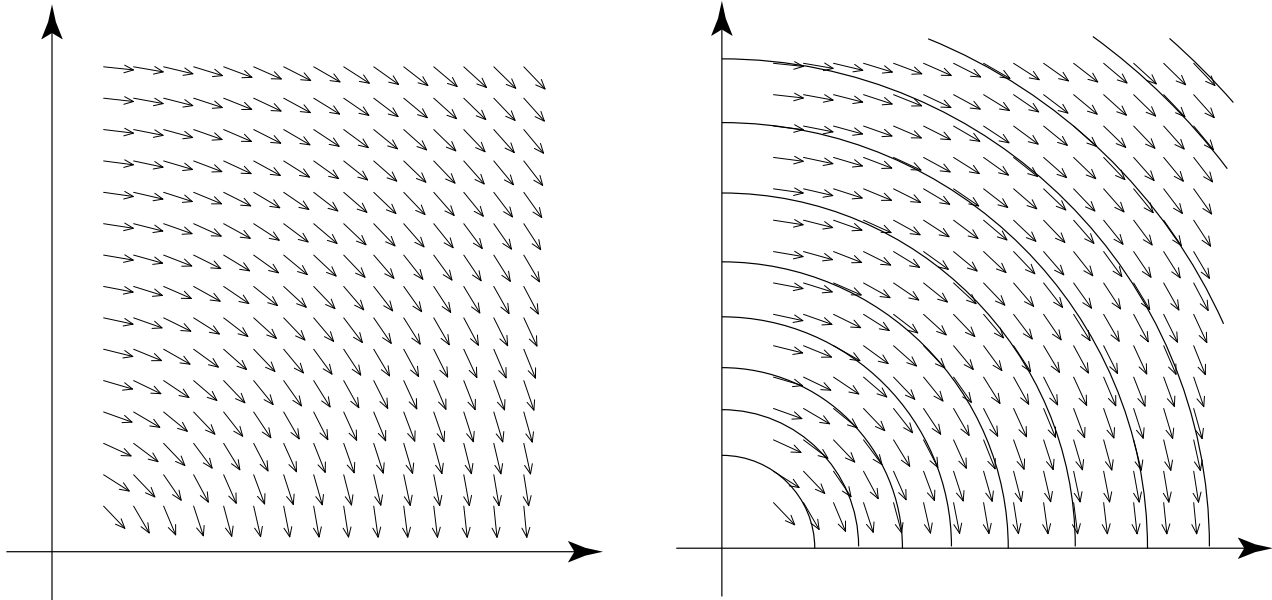


Figura 2: Representación del campo $f(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$.

O se denomina *polo* y la recta que une los puntos P y O se denomina *recta radial* de P .

Habitualmente, los sistemas de representación cartesiano y polar se eligen coincidentes de la siguiente forma: tomamos el semieje positivo OX como eje polar y el ángulo entre este eje y las rectas radiales se mide en el sentido contrario a las agujas del reloj. En adelante indicaremos con (x, y) un par de coordenadas cartesianas y con $(r, \theta)_P$ un par de coordenadas polares. El cambio de coordenadas polares a cartesianas es el siguiente:

$$(r, \theta)_P = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$$

Estas ecuaciones tienen sentido para todo $r \in \mathbb{R}$ y todo $\theta \in \mathbb{R}$; la consideración de \mathbb{R} como rango de θ es bastante natural por la periodicidad de las funciones sen y cos y la consideración de valores negativos para r nos lleva a la siguiente igualdad: $(r, \theta) = (-r, \theta + \pi)$. Esta extensión, sin embargo, hace que la correspondencia entre coordenadas polares y cartesianas no sea biyectiva y esta falta de biyección es especialmente significativa en el origen de coordenadas o polo ya que cualquier par de la forma $(0, \theta)$ representa a este punto.

La transformación inversa del cambio de coordenadas

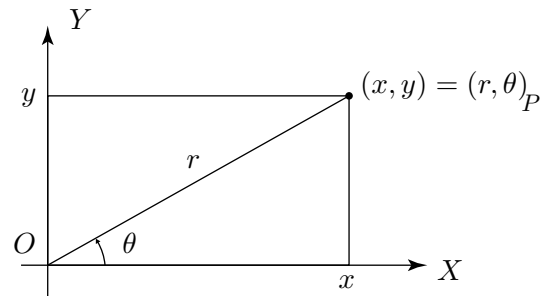
es la siguiente:

$$(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x})_P, \quad \text{si } x > 0$$

$$(x, y) = (-\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x})_P, \quad \text{si } x < 0$$

$$(0, y) = (y, \pi/2)_P, \quad \text{si } y > 0$$

Recuérdese que la función arcotangente se define de forma que: $-\pi/2 < \operatorname{arc} \operatorname{tg} z < \pi/2$. La representación gráfica de la conversión es:

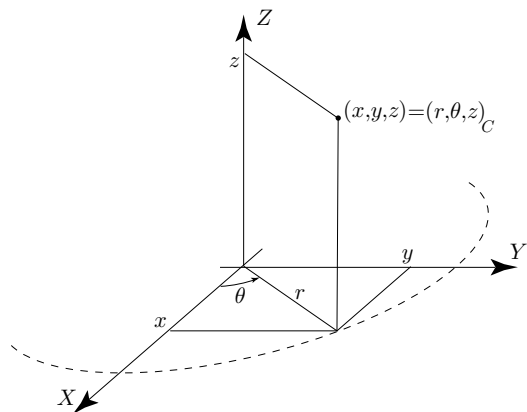


2.3.2. Coordenadas cilíndricas

Un sistema de representación cilíndrico está formado por los siguientes elementos: *un punto O , una semirrecta con origen en O , R , y un plano que contiene a la semirrecta, π .* Dado un punto P en el espacio, la posición de este punto respecto del sistema así definido está determinado por la terna (r, θ, z) donde:

- Si consideramos la proyección del segmento OP sobre π , r es la longitud de esta proyección.
- θ es el ángulo que forma la proyección del segmento OP y la recta R .
- z es la distancia del punto P al plano π , (asignándole a uno de los lados del plano distancias negativas)

Para establecer la correspondencia entre el sistema cartesiano y el cilíndrico, tomamos el siguiente sistema cilíndrico: el punto O es el origen de coordenadas, la semirrecta R es el semieje OX y el plano π es el plano XY . De esta forma tenemos la identificación que se muestra en la siguiente figura



En adelante indicaremos con $()$ una terna de coordenadas cartesianas y con $()_C$ una terna de coordenadas cilíndricas:

$$(r, \theta, z)_C = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

Como para las coordenadas polares, tiene sentido considerar cualquier valor real para r y cualquier valor real para θ . La conversión inversa viene dada por:

$$(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{x}, z)_C, \quad x > 0$$

$$(x, y, z) = (-\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{x}, z)_C, \quad x < 0$$

$$(0, y, z) = (y, \pi/2, z)_C$$

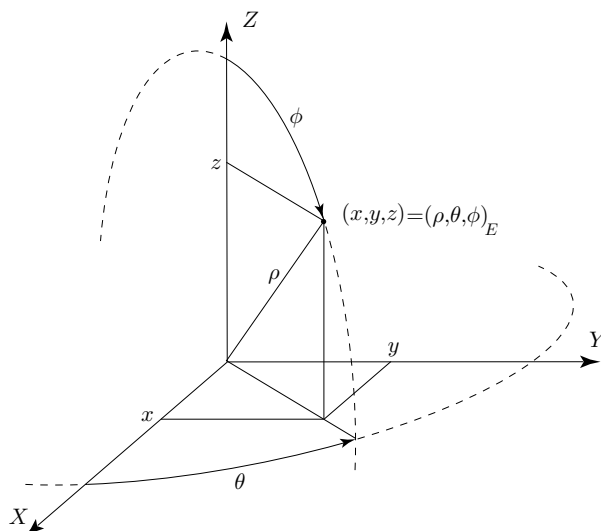
2.3.3. Coordenadas esféricas

Un sistema de representación esférico está formado por los siguientes elementos: un punto O , una semirrecta con origen en O , R y un plano que contiene a la

semirrecta, π . Dado un punto P en el espacio, la posición de este punto respecto del sistema así definido esta determinado por la terna (ρ, θ, ϕ) donde:

- ρ es la longitud del segmento OP .
- Si consideramos la proyección del segmento OP sobre π , θ es el ángulo que forma dicha proyección con R .
- Si consideramos la recta ortogonal a π que pasa por O , ϕ es el ángulo que forma el segmento OP con esta recta.

Para establecer la correspondencia entre el sistema cartesiano y el esférico, hacemos la siguiente identificación: el punto O es el origen de coordenadas, la semirrecta R es el semieje OX y el plano π es el plano XY . De esta forma tenemos la identificación que se muestra en la figura



En adelante indicaremos con $(\)_E$ una terna de coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}
 (\rho, \theta, \phi)_E &= (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \\
 (x, y, z) &= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \pm \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \right. \\
 &\quad \left. \pm \operatorname{arc\,cos} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)_E, \quad x \neq 0 \\
 (0, y, z) &= \left(\sqrt{y^2 + z^2}, \pm \pi/2, \pm \operatorname{arc\,cos} \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right)_E \\
 (\rho, \theta, \phi)_E &= (\rho \operatorname{sen} \phi, \theta, \rho \cos \phi)_C \\
 (r, \theta, z)_C &= \left(\sqrt{r^2 + z^2}, \theta, \pm \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)_E
 \end{aligned}$$

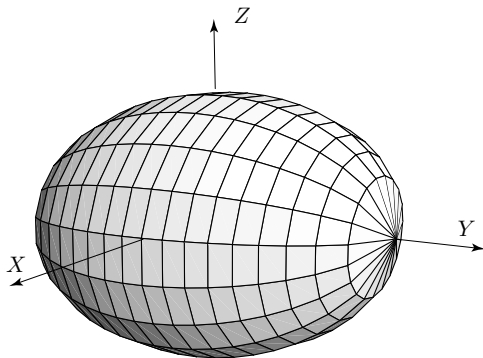
2.4. Cuádricas

Cualquier polinomio de dos variables de grado 2 determina una curva en el plano que se denomina cónica. De la misma forma, cualquier polinomio de tres variables de grado 2 determina una superficie en \mathbb{R}^3 que se denomina cuádrica. En esta sección repasamos estas superficies en su posición típica; utilizando métodos de álgebra lineal, se puede identificar cualquier polinomio con una de estas superficies.

2.4.1. Elipsoide

La ecuación y figura del *Elipsoide* son las siguientes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Una parametrización para esta superficie es:

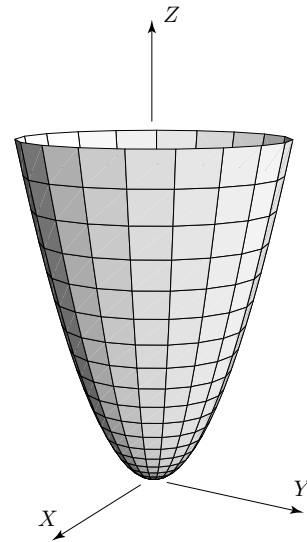
$$\begin{aligned}
 x(\theta, \phi) &= a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\
 y(\theta, \phi) &= b \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\
 z(\theta, \phi) &= c \cos \phi
 \end{aligned}$$

donde $\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$,

2.5. Paraboloides elíptico

La ecuación y figura del *Paraboloides elíptico* son:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



Una parametrización para el paraboloides elíptico es:

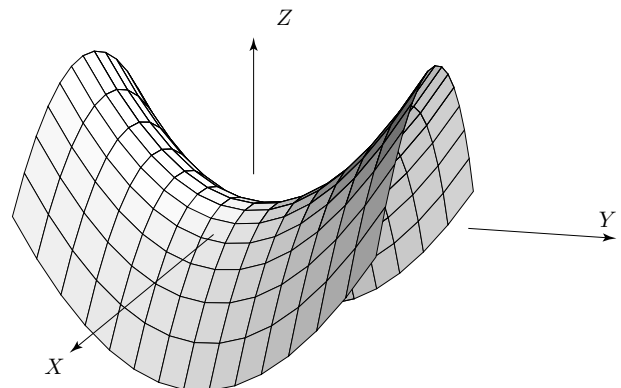
$$\begin{aligned}
 x(r, \theta) &= ar \cos \theta \\
 y(r, \theta) &= br \operatorname{sen} \theta \\
 z(r, \theta) &= r^2
 \end{aligned}$$

donde $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$,

2.6. Paraboloides hiperbólico

El *Paraboloides hiperbólico* se define con la ecuación:

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

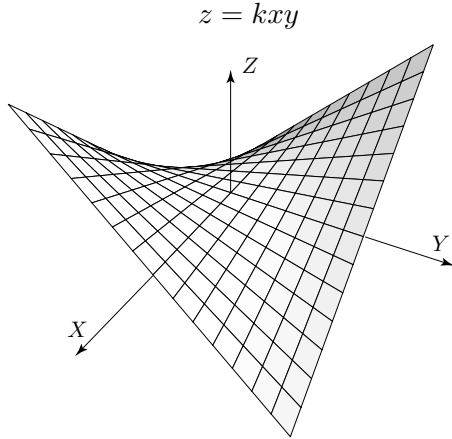


Una parametrización para el paraboloides hiperbólico es:

$$\begin{aligned}x(r, \theta) &= ar \cos \theta \\y(r, \theta) &= br \sin \theta \\z(r, \theta) &= -r^2 \cos 2\theta\end{aligned}$$

donde $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$,

Otro polinomio que representa igualmente un paraboloides hiperbólico es el siguiente:

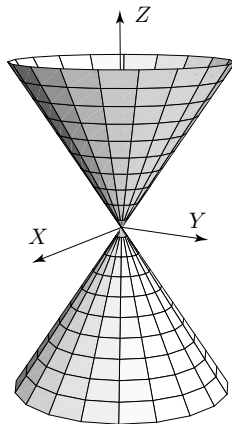


Esta figura se obtiene al girar $\pi/4$ radianes la anterior. Además, esta representación permite observar una importante característica de esta superficie: es una *superficie reglada*, es decir, para cada punto P del paraboloides, existe una recta r que contiene a P y tal que r está contenida en el paraboloides.

2.7. Cono

La ecuación y figura del *Cono* son las siguientes

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



Una importante propiedad del cono es que nos permite generar todas las curvas cónicas mediante secciones por planos; esto se puede conseguir con el cono

$$z^2 = \lambda^2(x^2 + y^2)$$

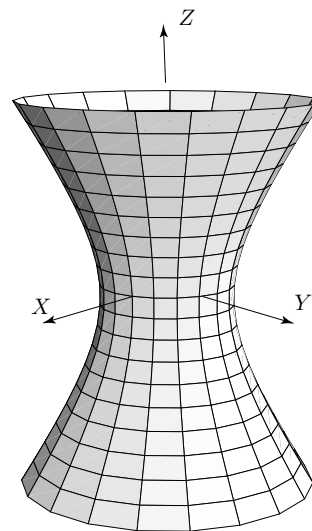
En concreto:

1. Las secciones por planos paralelos al eje OZ son hipérbolas.
2. Las secciones por planos perpendiculares al eje OZ son circunferencias.
3. Las secciones por planos paralelos a la generatriz son parábolas.
4. Las demás secciones son elipses.
5. Existen dos casos defectivos: las secciones por planos que contienen al eje OZ son un par de rectas y la sección por el plano XY es un punto.

2.8. Hiperboloide de una hoja

La ecuación y figura del *Hiperboloide de una hoja* son las siguientes

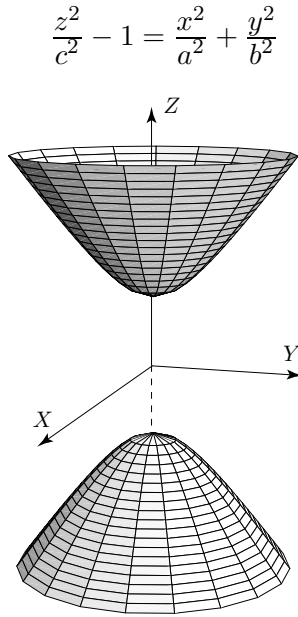
$$\frac{z^2}{c^2} + 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



El hiperboloide de una hoja también es una superficie reglada.

2.9. Hiperboloide de dos hojas

La ecuación y figura del *Hiperboloide de dos hojas* son las siguientes



3. Derivación implícita

Para introducir el problema que queremos plantear en esta sección, comenzamos analizando un ejemplo.

Consideremos el campo escalar $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$; la curva de nivel

$$N_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$$

es la circunferencia centrada en el origen y radio 1. Consideremos la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ definida *explícitamente*. El grafo de la función f está contenido en la curva N_0 y, por esta razón, decimos que $F(x, y) = 0$ define *implícitamente* a la función f . Es fácil observar que una igualdad del tipo $F(x, y) = 0$ no define necesariamente una única función y que no siempre es posible definir una función cuyo grafo coincida con toda la curva de nivel (en el ejemplo anterior no es posible).

El ejemplo anterior se puede formular de forma general como sigue: *dada una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, despejar y en función de x : $y = f(x)$.*

A continuación vamos a ver el resultado general que

permite analizar cuando es posible encontrar una función diferenciable a partir de una definición implícita.

Teorema 18 Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en el conjunto abierto D .

Sea $(a_1, \dots, a_n, b) \in D$ tal que $F(a_1, \dots, a_n, b) = 0$ y tal que

$$D_{n+1}f(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$$

entonces:

1. existen entornos abiertos, A de $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ y B de b , con $A \times B \in D$, y un campo $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(A) \subset B \quad \text{y} \quad F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

si $(x_1, \dots, x_n) \in A$; es decir, $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ define implícitamente y en función de (x_1, \dots, x_n) .

2. f es diferenciable y

$$\begin{aligned} D_i f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \\ &= - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))} \end{aligned}$$

Obsérvese que el resultado es local, afirmamos la existencia de una función definida en un entorno de un punto; dar una expresión explícita de esta función o encontrar el dominio más amplio dependerá de cada problema particular. Por otra parte, aunque el enunciado está enunciado para despejar la última coordenada, se pueden enunciar resultados análogos para cualquier coordenada.

Utilicemos este teorema para analizar el ejemplo anterior. Partíamos del campo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$: $\nabla F(x, y) = (2x, 2y)$. El teorema 18 no puede aplicarse a los puntos (x, y) tales que $F(x, y) = 0$ e $y = 0$, es decir, a los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Consideremos el punto $(0, 1)$ que está en N_0 y verifica la hipótesis del teorema 18; entonces existe un entorno $A = (-\varepsilon, \varepsilon)$ de 0 y una función $f: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definida implícitamente por $F(x, y) = 0$. En este caso, es fácil hallar esta función: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ cuyo dominio de derivabilidad

es $(-1, 1)$. En el punto $(0, -1)$ también se puede aplicar el teorema y la función definida implícitamente es $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

Debemos tener en cuenta que el teorema no dice nada de lo que ocurre en los puntos donde la parcial respecto de y es nula; en estos puntos puede ocurrir de todo y por tanto no se puede afirmar nada en general. En el ejemplo anterior, no es posible encontrar funciones definidas implícitamente por $F(x, y) = 0$ en entornos de $(-1, 0)$ o de $(1, 0)$.

Consideremos la función $G(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$;

$$\nabla G(x, y) = (4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 - 1))$$

Dado que $D_2G(0, 1) = 0$, no podemos aplicar el teorema al punto $(0, 1)$; sin embargo, la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es derivable en el intervalo $(-1, 1)$, está definida implícitamente por $G(x, y) = 0$ y pasa por el punto $(0, 1)$.

Damos a continuación el enunciado general del teorema de la función implícita para sistemas de ecuaciones.

Teorema 19 (de la función implícita) Sea $\mathbf{F}: D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en el conjunto abierto $D: \mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$. Sean $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ tales que $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in D$, $\mathbf{F}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = \mathbf{0}$ y

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces:

1. existen entornos abiertos, A de \mathbf{a} y B de \mathbf{b} , con $A \times B \subseteq D$, y un campo $\mathbf{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que

$$\mathbf{f}(A) \subset B \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

es decir, $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$ define implícitamente (y_1, \dots, y_m) en función de (x_1, \dots, x_n) .

2. f es diferenciable y

$$J\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Teorema 20 (de la función inversa) Sea $\mathbf{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en el conjunto abierto D ; $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)$. Sea $\mathbf{a} \in D$ tal que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces:

1. existe un entorno abierto A de \mathbf{a} tal que $\mathbf{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva y $B = \mathbf{f}(A)$ es un abierto.
2. $\mathbf{f}^{-1} = (\phi_1, \dots, \phi_n): B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable y

$$J(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{f}(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}(\mathbf{f}(x)) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_n}(\mathbf{f}(x)) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial y_1}(\mathbf{f}(x)) & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y_n}(\mathbf{f}(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$J(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{f}(x)) = (J\mathbf{f}(x))^{-1}$$

4. Derivadas de orden superior

Dado un campo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, podemos considerar el campo:

$$\nabla f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dado por $\nabla f = (D_1f, \dots, D_nf)$. La diferenciabilidad de ∇f es equivalente a la diferenciabilidad de los campos $D_i f$ cuyo estudio incluye la existencia de derivadas parciales; en caso de existir, las derivadas parciales de los campos $D_i f$ se denominan *derivadas de segundo orden* o *segundas derivadas* de f ; las notaciones para estas derivadas son:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad D_i(D_j f) = D_{ij} f$$

Por tanto, la matriz jacobiana de ∇f es:

$$J(\nabla f)(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} D_{11}f(\mathbf{a}) & D_{21}f(\mathbf{a}) & \cdots & D_{n1}f(\mathbf{a}) \\ D_{12}f(\mathbf{a}) & D_{22}f(\mathbf{a}) & \cdots & D_{n2}f(\mathbf{a}) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ D_{1n}f(\mathbf{a}) & D_{2n}f(\mathbf{a}) & \cdots & D_{nn}f(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

La matriz transpuesta de la anterior se denomina *matriz hessiana* de f :

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} D_{11}f(\mathbf{a}) & D_{12}f(\mathbf{a}) & \cdots & D_{1n}f(\mathbf{a}) \\ D_{21}f(\mathbf{a}) & D_{22}f(\mathbf{a}) & \cdots & D_{2n}f(\mathbf{a}) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ D_{n1}f(\mathbf{a}) & D_{n2}f(\mathbf{a}) & \cdots & D_{nn}f(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Esta matriz se corresponde con la segunda derivada de f .

Teorema 21 (de Schwarz) *Sea f un campo escalar tal que sus derivadas parciales de segundo orden son continuas; entonces, sus derivadas parciales mixtas son iguales:*

$$D_{ij} = D_{ji} \quad \text{para cada } i, j$$

Es decir, si las derivadas segundas de f son continuas, la matriz hessiana es simétrica.

Si $Hf(\mathbf{a})$ es simétrica tiene sentido definir la aplicación

$$q_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^t Hf(\mathbf{a}) \mathbf{u}$$

que se denomina *forma cuadrática asociada a $Hf(\mathbf{a})$* . Se puede observar fácilmente que las formas cuadráticas son polinomios de grado dos sin términos de grado menor.

Hemos introducido en esta sección la diferencial segunda de un campo escalar; el proceso seguido puede

repetirse para definir la diferencial tercera, diferencial cuarta, ...; en general, estas diferenciales se denominan *diferenciales de orden superior* y las derivadas parciales correspondientes *derivadas parciales de orden superior*. En este tema solo utilizaremos las derivadas de segundo orden, las derivadas de orden superior quedan fuera del objetivo de este curso.

4.1. Teorema de Taylor

Igual que las funciones reales de variable real, los campos escalares varias veces diferenciables pueden ser aproximados por polinomios, de forma que el comportamiento local de la función y del polinomio es muy parecido. Aunque solo vamos a enunciar el teorema para el segundo orden, el resultado puede ser generalizado a cualquier orden. Esta restricción sin embargo, hace que sean pocas las consecuencias que podamos sacar del mismo; en la siguiente sección lo vamos a utilizar para el estudio de los extremos de campos escalares.

Teorema 22 (Fórmula de Taylor de segundo orden)

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar dos veces diferenciable y con parciales de segundo orden continuas. Entonces:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) + df_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}q_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) + \|\mathbf{u}\|^2 E(\mathbf{a}, \mathbf{u})$$

donde $\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow 0} E(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = 0$

Es decir, en un entorno lo suficientemente pequeño de \mathbf{a} , la función $f(\mathbf{a} + \mathbf{u})$ tiene un comportamiento parecido al polinomio $f(\mathbf{a}) + df_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}q_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$.

5. Extremos de campos escalares

Definición 23 *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice que está acotado, si existe un $r > 0$ tal que $D \subset B(\mathbf{x}, r)$ para algún $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 24 *Sea f un campo escalar continuo y A un subconjunto cerrado y acotado del dominio de f ; entonces existen $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in A$ tales que $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_1)$ para todo $\mathbf{x} \in A$. Es decir, todo campo escalar continuo*

alcanza un máximo y un mínimo en cada subconjunto cerrado y acotado de su dominio.

Definición 25 Un campo escalar $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo local (o relativo) en $\mathbf{a} \in D$ si existe un $r > 0$, tal que $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r) \cap D$

Definición 26 Un campo escalar $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo local (o relativo) en $\mathbf{a} \in D$ si existe un $r > 0$, tal que $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r) \cap D$

Teorema 27 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable. Si $\mathbf{a} \in D$ es un extremo local de f , entonces $df_{\mathbf{a}} = 0$; es decir, todas las derivadas parciales de f en \mathbf{a} son nulas.

En el caso $n = 2$, la interpretación gráfica de este resultado es la siguiente: en los extremos locales de un campo, el plano tangente a la gráfica es paralelo al plano XY . Es fácil observar que el recíproco del teorema no es cierto. Los puntos en los cuales la diferencial es nula, se denominan *puntos críticos* y a los puntos críticos que no son extremos locales se denominan *puntos silla*.

Del teorema 27 se deduce el primer paso para determinar los extremos locales de un campo escalar: *debemos localizar los puntos críticos y aquellos puntos en los que el campo no es diferenciable*; entre estos puntos estarán todos los extremos. El siguiente paso es clasificar estos puntos, es decir, determinar cuales son máximos, cuales mínimos y cuales no son extremos. Esta clasificación se puede hacer comparando el valor de la función en el punto con los valores de la función en los puntos cercanos; aunque no siempre será sencillo, en muchas ocasiones, será la única forma de hacerlo. Para clasificar los puntos críticos, podemos utilizar el siguiente teorema, consecuencia del desarrollo de Taylor de la sección anterior, y análogo al criterio de la derivada segunda para funciones de una variable.

5.1. Criterio de la hessiana

Teorema 28 Sea $\mathbf{a} \in D$ un punto crítico del campo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable; sea $q_{\mathbf{a}}$ la forma cuadrática asociada a f y \mathbf{a} . Entonces:

1. Si $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) > 0$ para todo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, \mathbf{a} es un mínimo local de f . (Se dice que $q_{\mathbf{a}}$ es definida positiva)
2. Si $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) < 0$ para todo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, \mathbf{a} es un máximo local de f . (Se dice que $q_{\mathbf{a}}$ es definida negativa)
3. Si $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}_1) > 0$ y $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}_2) < 0$ para algún $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0}$, entonces, \mathbf{a} es un punto silla de f . (Se dice que $q_{\mathbf{a}}$ es indefinida)
4. En cualquier otro caso **no podemos deducir nada**.

Para aplicar este teorema debemos decidir el signo de la forma cuadrática $q_{\mathbf{a}}$. Para hacerlo existen varios métodos que repasamos a continuación:

5.1.1. Valores propios (NO)

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz hessiana $Hf(\mathbf{a})$.

1. Si $\lambda_i > 0$ para todo i , la forma cuadrática es definida positiva y \mathbf{a} es un mínimo local.
2. Si $\lambda_i < 0$ para todo i , la forma cuadrática es definida negativa y \mathbf{a} es un máximo local.
3. Si $\lambda_i > 0$ y $\lambda_j < 0$, la forma cuadrática es indefinida y \mathbf{a} no es extremo.
4. En cualquier otro caso, la forma cuadrática es semidefinida (positiva o negativa) y **no podemos deducir nada sobre \mathbf{a}** .

Para utilizar este método, debemos conocer los valores propios de la matriz (basta conocer el signo de cada uno), es decir, las raíces del polinomio característico. El método siguiente utiliza simplemente los coeficientes de este polinomio.

5.1.2. Polinomio característico (SÍ)

Proposición 29 Sea

$$p(\lambda) = |Hf(\mathbf{a}) - \lambda I| \\ = c_n - c_{n-1}\lambda + c_{n-2}\lambda^2 + \dots + (-1)^{n-1}c_1\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n.$$

(nos referiremos brevemente a este polinomio como polinomio característico en \mathbf{a}).

1. Si $c_i > 0$ para todo i , entonces la forma cuadrática es definida positiva y \mathbf{a} es un mínimo local.
2. Si el signo de c_i es $(-1)^i$ para todo i , la forma cuadrática es definida negativa y \mathbf{a} es un máximo local.
3. Si $c_i > 0$ hasta algún $r < n$ y los demás son nulos, entonces la forma cuadrática es semi-definida positiva y **no podemos afirmar nada sobre \mathbf{a}** .
4. Si el signo de c_i es $(-1)^i$ hasta algún $r < n$ y los demás son nulos, la forma cuadrática es semi-definida negativa y **no podemos afirmar nada sobre \mathbf{a}** .
5. En cualquier otro caso, la forma es indefinida y \mathbf{a} no es extremo.

Supongamos que la matriz hessiana de un campo f en un punto crítico \mathbf{a} es

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de esta matriz es: $p(\lambda) = 12\lambda - 10\lambda^2 - 8\lambda^3 + \lambda^4$ y en consecuencia, la forma cuadrática asociada es indefinida y el punto \mathbf{a} es un punto silla. Veamos otros ejemplos de posibles polinomios característicos de matrices hessianas y las conclusiones que obtenemos:

$\lambda^4 + 2\lambda^3 - 7\lambda^2 - 20\lambda - 12$	Indefinida (punto silla)
$-\lambda^3 - 7\lambda^2 - 11\lambda - 5$	Definida negativa (máx.)
$\lambda^4 - \lambda^2$	Indefinida (punto silla)
$\lambda^4 - 7\lambda^3 + 16\lambda^2 - 12\lambda$	Semidefinida positiva
$\lambda^4 - 11\lambda^3 + 41\lambda^2 - 61\lambda + 30$	Definida positiva (mín.)
$-\lambda^5 - 5\lambda^4 - 8\lambda^3 - 4\lambda^2$	Semidefinida negativa

El estudio del polinomio característico para campos sobre \mathbb{R}^2 se reduce al siguiente resultado:

Proposición 30 Sea \mathbf{a} un punto crítico del campo $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable; sea $Hf(\mathbf{a})$ la matriz hessiana de f en \mathbf{a} .

1. Si $|Hf(\mathbf{a})| > 0$ y $D_{11}f(\mathbf{a}) > 0$, la forma cuadrática es definida positiva y \mathbf{a} es un mínimo local.
2. Si $|Hf(\mathbf{a})| > 0$ y $D_{11}f(\mathbf{a}) < 0$, la forma cuadrática es definida negativa y \mathbf{a} es un máximo local.
3. Si $|Hf(\mathbf{a})| < 0$, la forma cuadrática es indefinida y \mathbf{a} no es extremo local.
4. En cualquier otro caso, la forma cuadrática es semidefinida (positiva o negativa) y **no podemos deducir nada sobre \mathbf{a}** .

5.1.3. Compleción de cuadrados (NO)

Mediante la técnica algebraica de completar cuadrados, se puede transformar el polinomio cuadrático $q_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$ en sumas de cuadrados de polinomios de grado 1 multiplicados por un coeficiente (positivo o negativo). El número de sumandos debe ser n ; si hay menos sumandos, entendemos que los que faltan están multiplicados por un coeficiente nulo. A partir de los coeficientes de estos sumandos, deducimos que:

1. Si los n coeficientes son estrictamente positivos, la forma cuadrática es definida positiva y \mathbf{a} es un mínimo.
2. Si los n coeficientes son estrictamente negativos, la forma cuadrática es definida negativa y \mathbf{a} es un máximo.
3. Si algún coeficiente es positivo y otro es negativo, la forma cuadrática es indefinida y \mathbf{a} no es extremo.
4. En los demás casos, la forma es semidefinida y **no podemos deducir nada sobre \mathbf{a}** .

La explicación teórica del método puede resultar difícil de seguir; por ello es preferible repasarlo sobre un ejemplo:

Supongamos que la matriz hessiana de un campo f en un punto crítico \mathbf{a} es

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma cuadrática asociada a esta matriz es:

$$q_{\mathbf{a}}(x, y, z, t) = (x \ y \ z \ t) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + t^2 + 4xy + 6xz + 2xt + 6yz + 2yt + 6zt$$

El proceso empieza eligiendo una variable (por ejemplo x); a continuación multiplicamos y dividimos por el coeficiente del cuadrado de esta variable; mediante la completación de un cuadrado conseguimos que todos los sumandos donde aparece la variable x pertenezcan a un cuadrado:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 3t^2 + 4xy + 6xz + 2xt + 6yz + 2yt + 6zt =$$

$$= \frac{1}{2}(4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 6t^2 + \underline{8xy} + \underline{12xz} + \underline{4xt} +$$

$$12yz + 4yt + 12zt)$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{(2x + 2y + 3z + t)^2} - 4y^2 - 9z^2 - t^2$$

$$\underline{-12yz - 4yt - 6zt}$$

$$+ 4y^2 + 2z^2 + 6t^2 + 12yz + 4yt + 12zt)$$

$$= \frac{1}{2}((2x + 2y + 3z + t)^2 - 7z^2 + 5t^2 + 6zt)$$

Con esto, logramos *eliminar* la variable x (en este caso también la variable y). A partir de aquí se repite el mismo proceso con las variables restantes hasta conseguir transformar toda la expresión a la forma deseada:

$$= \frac{1}{2}((2x + 2y + 3z + t)^2 - \frac{1}{7}(49z^2 - 35t^2 - 42zt))$$

$$= \frac{1}{2}((2x + 2y + 3z + t)^2 - \frac{1}{7}(\underline{(7z - 3t)^2} - 9t^2 - 35t^2))$$

$$= \frac{1}{2}((2x + 2y + 3z + t)^2 - \frac{1}{7}((7z + 3t)^2 - 44t^2))$$

$$= \frac{1}{2}(2x + 2y + 3z + t)^2 - \frac{1}{14}(7z + 3t)^2 + \frac{22}{7}t^2)$$

Los coeficientes que hemos obtenido son $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{14}$, $\frac{22}{7}$ y 0 y en consecuencia, la forma es indefinida y el punto \mathbf{a} no es extremo.

5.1.4. Criterio de Sylvester

Por último vamos a enunciar el criterio de Sylvester que, si bien no es el que más información da, sí es el más utilizado. Este método no permite clasificar completamente la forma cuadrática y por tanto, no utiliza toda la información que da el criterio de la hessiana.

Consideremos los siguientes menores de la matriz hessiana:

$$A_1 = D_{11}f(\mathbf{a}), A_2 = \begin{vmatrix} D_{11}f(\mathbf{a}) & D_{12}f(\mathbf{a}) \\ D_{21}f(\mathbf{a}) & D_{22}f(\mathbf{a}) \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} D_{11}f(\mathbf{a}) & D_{12}f(\mathbf{a}) & D_{13}f(\mathbf{a}) \\ D_{21}f(\mathbf{a}) & D_{22}f(\mathbf{a}) & D_{23}f(\mathbf{a}) \\ D_{31}f(\mathbf{a}) & D_{32}f(\mathbf{a}) & D_{33}f(\mathbf{a}) \end{vmatrix}$$

...

$$A_n = \begin{vmatrix} D_{11}f(\mathbf{a}) & D_{12}f(\mathbf{a}) & \dots & D_{1n}f(\mathbf{a}) \\ D_{21}f(\mathbf{a}) & D_{22}f(\mathbf{a}) & \dots & D_{2n}f(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}f(\mathbf{a}) & D_{n2}f(\mathbf{a}) & \dots & D_{nn}f(\mathbf{a}) \end{vmatrix}$$

1. \mathbf{a} es mínimo de f si y solo si $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, ..., $A_n > 0$.
2. \mathbf{a} es máximo de f si y solo si $-A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $-A_3 > 0$, ..., $(-1)^n A_n > 0$, es decir, el signo de A_i es $(-1)^i$.
3. En los demás casos, la forma es semidefinida o indefinida y no podemos concluir nada sobre \mathbf{a} ; no obstante, podemos estudiar algunos otros casos: supongamos que no se verifican las condiciones de los dos primeros casos, entonces:
 - a) Si $A_n \neq 0$, entonces a es punto de silla
 - b) Si en la diagonal principal hay un elemento positivos y otro negativo, entonces a es punto silla (esta condición se puede aplicar siempre).

- c) Si algún menor principal de orden 2 es negativo, entonces a es punto silla (esta condición se puede aplicar siempre).

En el ejemplo del apartado anterior obtendríamos los siguientes valores:

$$A_1 = 2 \quad A_2 = 0 \quad A_3 = 0 \quad A_4 = 0$$

y no podríamos deducir nada con el criterio de Sylvester.

Aconsejaría al alumno el uso del polinomio característico ya que: nos permite obtener la máxima información de la matriz hessiana, es sencillo de manejar y es generalizable al estudio de extremos condicionados. (El criterio de Sylvester también es generalizable, pero no extrae la máxima información de la hessiana; la compleción de cuadrados es igualmente generalizable, pero su uso es demasiado laborioso)

5.2. Método general

Para terminar el estudio de los extremos locales no condicionados, sería conveniente ordenar todo lo dicho hasta ahora en un esquema. Antes de esto, vamos a ver un último resultado teórico, que permite tratar aquellos casos que no son contemplados por el criterio de la hessiana:

Teorema 31 Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\mathbf{a} \in D$; para cada vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ unitario consideremos la función (en una variable) $g_{\mathbf{u}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$. Entonces:

a es máximo (respectivamente mínimo) local de f si y solo si existe un número real $\epsilon > 0$ tal que 0 es máximo (respectivamente mínimo) absoluto de todas las funciones $g_{\mathbf{u}}$ sobre el intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$

La importancia de este resultado está en que reduce el estudio de extremos locales de campos escalares al estudio de extremos locales de funciones reales de variable real, (y para estas funciones podemos decidir completamente la naturaleza de un punto) y, además, se puede aplicar a puntos donde f no es diferenciable.

Sin embargo, la aplicación de este teorema en la práctica no siempre es sencilla, ya que las funciones $g_{\mathbf{u}}$ dependen de varios parámetros (al menos $n-1$ parámetros). La forma más simple de aplicar dicho teorema queda recogida en el siguiente corolario:

Corolario 32 Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\mathbf{a} \in D$; para cada vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ unitario consideremos la función $g_{\mathbf{u}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$.

1. Si 0 es máximo local de una función $g_{\mathbf{u}}$ y mínimo local de otra función $g_{\mathbf{v}}$, entonces \mathbf{a} no es extremo local de f .
2. Si 0 no es ni máximo ni mínimo local de alguna función $g_{\mathbf{u}_0}$, entonces, \mathbf{a} no es ni máximo ni mínimo local de f .

Resumimos en un esquema el *método general* que debemos seguir para determinar los extremos locales de un campo f . No debemos saltarnos ningún paso, pero en cada uno podemos concluir el estudio.

1. Determinar todos los puntos críticos y los puntos donde el campo no es diferenciable. Estos serán los *candidatos* a extremos locales:

Si el campo es diferenciable en todo su dominio y no tiene puntos críticos, entonces no tiene extremos locales.

A partir de aquí, debemos clasificar cada uno de los *candidatos*; por tanto, los pasos siguientes se repetirán para cada uno.

2. Si f es dos veces diferenciable en \mathbf{a} , aplicamos el criterio de la hessiana, preferiblemente usando el polinomio característico.
3. Para cada \mathbf{a} construimos las funciones $g_{\mathbf{u}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$ y estudiamos si 0 es extremo local de todas ellas; esto lo haremos, preferiblemente, estudiando el signo de la derivada de cada $g_{\mathbf{u}}$ alrededor del 0 ; para aquellas $g_{\mathbf{u}}$ que sean varias veces derivables en 0 , podremos usar igualmente el criterio de las derivadas sucesivas:

Si existe alguna función $g_{\mathbf{u}}$ para la cual 0 no sea ni máximo ni mínimo, entonces podremos concluir

que \mathbf{a} no es ni máximo ni mínimo local de f . Igualmente, si 0 es máximo local de una $g_{\mathbf{u}}$ y mínimo local de $g_{\mathbf{v}}$, entonces podremos concluir que \mathbf{a} no es ni máximo ni mínimo local de f .

- Si llegamos hasta aquí con algún punto \mathbf{a} de los obtenidos en el primer paso, hay bastantes posibilidades de que el punto sea máximo o mínimo, pero no podemos afirmar nada; debemos recurrir a la expresión de f y comparar $f(\mathbf{x})$ con $f(\mathbf{a})$ (dependiendo de la complejidad de f esto puede ser más o menos difícil).

Ejemplo: Determinar y clasificar los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 - y^3$.

$$D_1 f(x, y) = 3x^2 \quad D_2 f(x, y) = -3y^2$$

Por tanto, el único punto crítico es $(0, 0)$.

$$D_{11} f(x, y) = 6x \quad D_{21} f(x, y) = 0 \quad D_{22} f(x, y) = -6y$$

Por tanto, la matriz hessiana de f en $(0, 0)$ es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

y no nos permite clasificar el punto crítico. La función $g_{(0,1)}(t) = f(0, t) = -t^3$ tiene un punto de inflexión en 0 , y por tanto, $(0, 0)$ no es ni máximo ni mínimo de f .

6. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

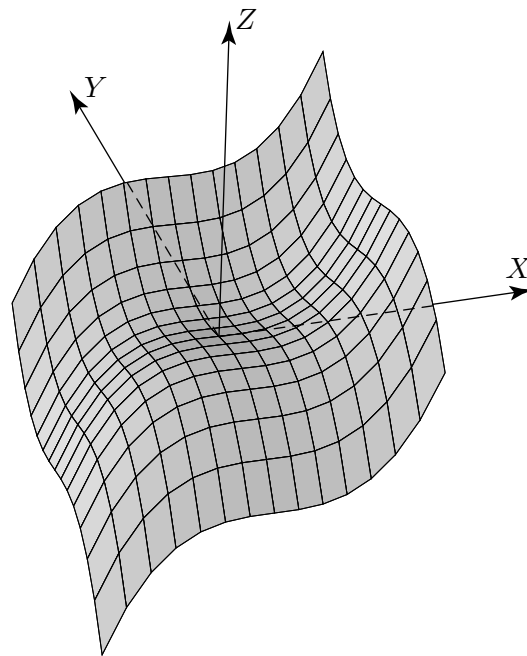
En la sección anterior hemos afrontado el problema de hallar los extremos locales de un campo escalar, es decir, los extremos sobre conjuntos abiertos. Sin embargo, en muchas ocasiones nos interesará estudiar los extremos sobre conjuntos que no son abiertos; por ejemplo, estudiar los extremos de un campo sobre \mathbb{R}^2 restringiéndonos a una circunferencia. El problema general que abordamos en esta sección es el siguiente: encontrar los extremos de la función $f(x_1, \dots, x_n)$ sobre un conjunto S definido por:

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \mathbf{g}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{0}\}$$

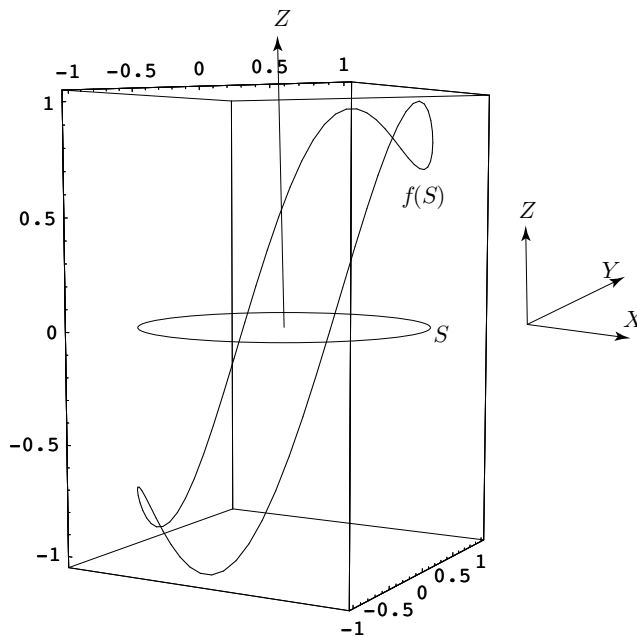
donde $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$ es un campo vectorial. Este problema se lee: encontrar los extremos del campo escalar

f con las condiciones o restricciones $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, $0 \leq i \leq k$.

Vemos abajo el grafo del campo escalar $f(x, y) = x^3 + y^3$. Por los métodos de la sección anterior podemos deducir que f no tiene extremos locales; es decir, la función no alcanza ni máximo ni mínimo sobre ningún conjunto abierto.



Sin embargo, si restringimos f a la circunferencia $S \equiv \{x^2 + y^2 = 1\}$, observamos que sí se alcanzan máximos y mínimos. Representamos el conjunto $f(S)$ para visualizar esta afirmación:



El teorema fundamental que nos permite abordar este tipo de problemas es el siguiente:

Teorema 33 Sean $f, g_1, \dots, g_k: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campos escalares diferenciables y con derivadas parciales continuas. Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n cuyos puntos verifican las condiciones:

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{para todo } i$$

Entonces se verifica que: si \mathbf{x}_0 es un extremo local de f restringida a S , y $\{\nabla g_i(\mathbf{x}_0)\}$ es un sistema de vectores no nulos linealmente independientes,¹ entonces, existen números reales μ_i tales que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mu_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \dots + \mu_k \nabla g_k(\mathbf{x}_0)$$

A las constantes μ_1, \dots, μ_k se las denomina multiplicadores de Lagrange asociados a \mathbf{x}_0 .

Este teorema nos da el primer paso a seguir para la determinación de los extremos condicionados:

- Los extremos locales del campo $f(x_1, \dots, x_n)$ con las restricciones $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$, se encuentran entre los puntos (x_1, \dots, x_n) cuyas coordenadas son solución del sistema:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ D_1 f(\mathbf{x}) &= \mu_1 D_1 g_1(\mathbf{x}) + \dots + \mu_k D_1 g_k(\mathbf{x}) \\ &\dots \\ D_n f(\mathbf{x}) &= \mu_1 D_n g_1(\mathbf{x}) + \dots + \mu_k D_n g_k(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Si $x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_k$ es una solución del sistema, (x_1, \dots, x_n) se denomina *punto crítico* de f con las restricciones g_i , y μ_1, \dots, μ_k son sus multiplicadores de Lagrange asociados.

¹La condición: “ $\{\nabla g_i(\mathbf{x}_0)\}$ es un sistema de vectores no nulos linealmente independientes”, exigida en el teorema, se traduce en la práctica a observar que el problema está bien planteado, es decir, que no hay condiciones superfluas, y que estas están dadas de la mejor forma posible.

Igual que para los extremos no condicionados, el problema siguiente es clasificar los puntos críticos, decidiendo cuales son máximos, cuales mínimos y cuales no son extremos.

Teorema 34 Sea $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ un punto crítico de f y $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ sus multiplicadores de Lagrange; consideremos el campo $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \alpha_1 g_1(\mathbf{x}) - \dots - \alpha_k g_k(\mathbf{x});$$

sea q la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de F en \mathbf{a} y sea T el espacio vectorial tangente a S en \mathbf{a} (la dimensión del subespacio T es $n - k$).

1. Si $q(\mathbf{u}) > 0$ para todo $\mathbf{u} \in T$, entonces \mathbf{a} es punto mínimo.
2. Si $q(\mathbf{u}) < 0$ para todo $\mathbf{u} \in T$, entonces \mathbf{a} es punto máximo.
3. Si $q(\mathbf{u}_1) > 0$ para algún $\mathbf{u}_1 \in T$ y $q(\mathbf{u}_2) < 0$ para algún $\mathbf{u}_2 \in T$, entonces \mathbf{a} no es extremo.
4. En cualquier otro caso, **no podemos deducir nada**.

Es decir, para determinar la naturaleza de un punto crítico \mathbf{a} tenemos que estudiar el signo de la forma cuadrática $q|_T$ (restricción de la forma cuadrática q al subespacio T). La forma más sencilla de hacer esto es utilizando el polinomio característico de la forma cuadrática $q|_T$ aplicando la proposición 29, (dado que la dimensión de T es $n - k$, el grado de este polinomio es $n - k$). El siguiente resultado nos da una forma sencilla de obtener este polinomio característico:

Proposición 35 Sea \mathbf{g} el campo vectorial $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$; denotemos por $\mathbf{0}$ a la matriz cuadrada de tamaño $k \times k$ y cuyos elementos son todos nulos. Entonces, el polinomio característico de $q|_T$ viene dado, salvo una constante, por:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & J\mathbf{g}(\mathbf{a}) \\ J\mathbf{g}(\mathbf{a})^t & HF(\mathbf{a}) - \lambda I \end{vmatrix}$$

Nos referiremos brevemente a este polinomio como polinomio característico en \mathbf{a} .

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= \begin{vmatrix} \mathbf{0} & Jg(\mathbf{a}) \\ Jg(\mathbf{a})^t & HF(\mathbf{a}) - \lambda I \end{vmatrix} \\
 &= \gamma(c_{n-k} - c_{n-k-1}\lambda + c_{n-k-2}\lambda^2 + \dots \\
 &\quad \dots + (-1)^{n-k-1}c_1\lambda^{n-k-1} + (-1)^{n-k}\lambda^{n-k})
 \end{aligned}$$

el polinomio característico en \mathbf{a} .

1. Si $c_i > 0$ para todo i , entonces la forma cuadrática es definida positiva y \mathbf{a} es un mínimo.
2. Si el signo de c_i es $(-1)^i$ para todo i , la forma cuadrática es definida negativa y \mathbf{a} es un máximo.
3. Si $c_i > 0$ hasta algún $r < n - k$ y los demás son nulos, entonces la forma cuadrática es semi-definida positiva y **no podemos afirmar nada sobre \mathbf{a}** .
4. Si el signo de c_i es $(-1)^i$ hasta algún $r < n - k$ y los demás son nulos, la forma cuadrática es semi-definida negativa y **no podemos afirmar nada sobre \mathbf{a}** .
5. En cualquier otro caso, la forma es indefinida y \mathbf{a} no es extremo.

6.1. Otro método

Otra forma de abordar el problema planteado anteriormente es la siguiente. Dado el conjunto S definido en la sección anterior, tomamos un campo vectorial $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ de tal forma que $\text{Im}(\phi) = S$. Entonces, los extremos de f con las restricciones $g_i = 0$ coinciden con los extremos del campo escalar $f \circ \phi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$.

Este método podrá aplicarse en problemas sencillos. Los inconvenientes de este método alternativo son los siguientes:

- No siempre es fácil definir la función ϕ .
- En muchas ocasiones, no será posible definir una aplicación ϕ cuya imagen coincida con «todo» el conjunto S y será necesario dividirlo en trozos.

7. Extremos absolutos

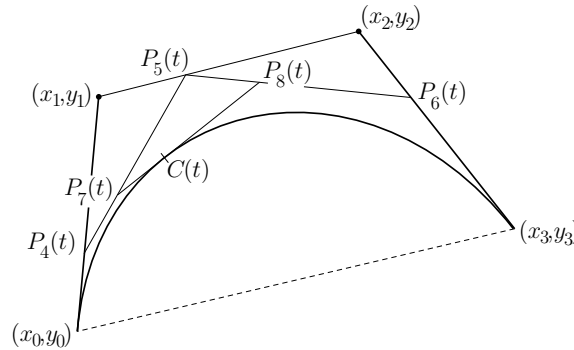
Para terminar, vemos como tenemos que resolver un problema en el que pidan obtener los extremos absolutos de un campo sobre un conjunto cerrado C . En primer lugar dividimos C en dos conjuntos: $C = U \cup \text{Fr}(U)$ donde U es un conjunto abierto y $\text{Fr}(U)$ es su frontera; a continuación:

1. Encontramos los puntos críticos de f en U y los puntos de no diferenciabilidad.
2. Encontramos los puntos críticos de f restringida a $\text{Fr}(U)$ por el método de los multiplicadores de Lagrange y los puntos donde no se puede aplicar el método.
3. Calculamos los valores del campo en todos los puntos anteriores.
4. Comparando todos los valores, deducimos cual es el máximo y el mínimo.

Ingeniería Informática
Relación 5 de Cálculo para la computación

Curso 2002/03

1. Considerar la curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$. Probar que las tangentes a esta curva forman un ángulo constante con la recta $y = 0, z = x$.
2. Un disco circular de radio 1 rueda, sin deslizarse, a lo largo del eje OX ; la curva descrita por un punto de la circunferencia del disco se denomina *cicloide*. Dar una parametrización de dicha curva. ¿Es una curva diferenciable?, ¿Es una curva regular?
3. *Curvas de Bezier*. Pierre Bezier fue un ingeniero de Renault que durante los años 60 realizó un estudio con el objetivo de mejorar el diseño de componentes. Paralelamente, otro ingeniero de automóviles, perteneciente a la empresa Citroën, llamado Paul de Faget de Casteljau, estaba trabajando sobre el mismo campo. De este último no se llegó a publicar nada en principio, con lo cual Bezier fue el que se llevó los honores y el que da nombre a este tipo de curvas, que son la base de los paquetes de diseño vectorial.



Dados cuatro puntos en el plano, no alineados, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$, se define la curva de Bezier, γ , que une los puntos P_0 y P_3 como sigue. Para cada $t \in [0, 1]$: el punto $P_4(t)$ es el punto del segmento P_0P_1 de tal forma que $\frac{|P_0P_4(t)|}{|P_0P_1|} = t$; el punto $P_5(t)$ es el punto del segmento P_1P_2 de tal forma que $\frac{|P_1P_5(t)|}{|P_1P_2|} = t$; el punto $P_6(t)$ es el punto del segmento P_2P_3 de tal forma que $\frac{|P_2P_6(t)|}{|P_2P_3|} = t$; el punto $P_7(t)$ es el punto del segmento $P_4(t)P_5(t)$ de tal forma que $\frac{|P_4(t)P_7(t)|}{|P_4(t)P_5(t)|} = t$; el punto $P_8(t)$ es el punto del segmento $P_5(t)P_6(t)$ de tal forma que $\frac{|P_5(t)P_8(t)|}{|P_5(t)P_6(t)|} = t$; finalmente, el punto $\gamma(t)$ es el punto del segmento $P_7(t)P_8(t)$ de tal forma que $\frac{|P_7(t)\gamma(t)|}{|P_7(t)P_8(t)|} = t$.

a) Demostrar que:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Probar que el segmento P_0P_1 es tangente al punto $\gamma(0) = P_0$ y que el segmento P_2P_3 es tangente al punto $\gamma(1) = P_3$.

- c) Determinar la curva de Bezier para los puntos $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 3)$, $P_3 = (3, 0)$. Escribirla como $y = f(x)$ y dibujarla.
- d) Tres de los puntos pueden estar alineados: Determinar la curva de Bezier para los puntos $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (2, 2)$, $P_3 = (3, 0)$. Escribirla como $y = f(x)$ y dibujarla.
- e) No es posible describir una circunferencia como curva Bezier, pero sí se puede construir una aproximación bastante buena. La curva de Bezier determinada por los puntos $P_0 = (-\rho, \rho)$, $P_1 = (-\rho + s, \rho + s)$, $P_2 = (\rho - s, \rho + s)$, $P_3 = (\rho, \rho)$, en donde $\rho = \frac{r}{\sqrt{2}}$ y $s = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})r$ es la curva de Bezier más próxima a la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y de radio r . Para $r = 1$ determinar esta curva de Bezier y calcular la distancia aproximada del punto $\gamma(0.2)$ al origen.
4. Considerar la curva: $\alpha(t) = \left(\frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{2t^3}{1+t^2} \right)$, $t \in \mathbb{R}$.
- a) ¿Es una parametrización regular? ¿Es una curva regular?
- b) Hallar: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t)$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha'(t)$.
- c) Dibujar la curva (Indicación: representar en primer lugar las gráficas de α_1 y α_2 ; a partir de estas gráficas y del estudio de los puntos anteriores es posible deducir la forma de la curva con bastante exactitud).
5. Considerar la curva: $\alpha(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- a) Hallar la recta tangente en el origen ($\alpha(0) = (0, 0)$).
- b) Hallar: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha'(t)$, $\lim_{t \rightarrow -1} \alpha(t)$ y $\lim_{t \rightarrow -1} \alpha'(t)$.
- c) Dibujar la curva. ¿Es una curva simple?
6. Dada una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, llamamos *curvatura* de α en el punto $\alpha(t)$ al número $k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|_2}{\|\alpha'(t)\|_2^3}$. Hallar la curvatura de la curva $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ en cada punto.
7. Hallar una ecuación de la recta tangente, para el valor indicado del parámetro, en las siguientes curvas:
- a) $x = 2t$, $y = t^2 - 1$ en $t = 2$
- b) $x = 2 + \cotg \theta$, $y = 2 \sen^2 \theta$ en $\theta = \pi/4$
8. En las siguientes curvas, localizar todos los puntos, si los hay, en los que la tangente sea horizontal o vertical
- a) $x = 1 - t$, $y = t^3 - 3t$
- b) $x = \cos \theta + \theta \sen \theta$, $y = \sen \theta - \theta \cos \theta$
- c) $x = 2\theta + \theta \sen \theta$, $y = 2(1 - \cos \theta)$
- d) $x = \sec \theta$, $y = \tan \theta$
9. Consideramos la función: $f(\theta) = 2 + 3 \sen \theta$.
- a) Representar la función f en los ejes cartesianos de la forma habitual, $(\theta, f(\theta))$.
- b) Representar la misma función utilizando coordenadas polares, es decir, $(f(\theta), \theta)$; describir la curva resultante con ecuaciones paramétricas.

Las curvas descritas como gráfica en coordenadas polares de una función real de variable real, se denominan *curvas polares* y son un caso particular de curvas paramétricas.

10. Repetir el ejercicio anterior para las siguientes curvas polares:

a) $r = 2(1 - \operatorname{sen} \theta)$

b) $r = \operatorname{sen} 3\theta$

c) $r = a \operatorname{sen} \theta$

d) $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$

11. Localizar los puntos de tangencia horizontal y vertical, si los hay, de las curvas polares siguientes

a) $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

b) $r = 2 \operatorname{cosec} \theta + 3$

c) $r = a \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta$

12. Representar la curva polar $r = 2 - \operatorname{sec} \theta$. Verificar que la recta $X = -1$ es una asíntota de la curva.

13. Analizar dónde está el error del siguiente desarrollo:

En un campo escalar en \mathbb{R}^3 , $w = f(x, y, z)$, hacemos $z = g(x, y)$; se tiene entonces:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

Simplificando $\frac{\partial w}{\partial x}$ en los dos miembros se obtiene que:

$$\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

Consideremos el caso particular $w = x + y + z$, $z = x + y$; entonces:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 1 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

y de ahí:

$$\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 \tag{2}$$

Claramente las igualdades 1 y 2 son contradictorias.

14. La introducción de las coordenadas esféricas cambia $f(x, y, z)$ en $F(\rho, \theta, \phi)$. Expresar las derivadas parciales de F en función de las derivadas de f . Repetir el ejercicio para las coordenadas cilíndricas.

15. En los siguientes apartados hallar dw/dt , primero expresando w explícitamente como función de t y diferenciando, y luego por medio de la regla de la cadena:

a) $w = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $x = \cosh t$, $y = \sinh t$

b) $w = xe^y + y \operatorname{sen} x$, $x = t$, $y = t^2$

16. Determinar $\partial w/\partial x$ si $w = uv + \log v$, $u = x + y^2$, $v = e^x \cos y$. (Dar la respuesta respecto de u y v .)

17. Hallar $\partial w/\partial u$ si $w = x^2 + y^2$, $x = u - v$, $y = ve^{2u}$. (Dar la respuesta en x e y .)

18. Hallar $\partial w/\partial v$ cuando $u = 0$, $v = 0$ si $w = (x^2 + y - 2)^4 + (x - y + 2)^3$, $x = u - 2v + 1$, $y = 2u + v - 2$.

19. Si $w = \log(x^2 + y^2 + 2z)$, $x = r + s$, $y = r - s$, $z = 2rs$, hallar $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial s$ por la regla de la cadena y verificar la respuesta usando un método diferente.

20. Si $w = f(x + y, x - y)$ tiene derivadas parciales continuas respecto a $u = x + y$, $v = x - y$, probar que

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.$$

21. Sea f_p la función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} definida así:

$$f_p(x, y) = \frac{x^p}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0, \quad p \in \mathbb{N}$$

Discútase según los valores de p :

- La continuidad de f_p en $(0, 0)$.
- La existencia de $D_{\mathbf{v}}f_p(0, 0)$ siendo $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ un vector cualquiera.
- La diferenciabilidad de f_p en $(0, 0)$.
- Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por:

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + \cos y, f_4(x, y))$$

Justifíquese la diferenciabilidad de $\mathbf{G} = \mathbf{F} \circ \mathbf{F} + \mathbf{F}$ en $(0, 0)$ y calcúlese $J\mathbf{G}(0, 0)$.

22. Considerar el paraboloido hiperbólico $S = \{(x, y, z) | z = x^2 - y^2\}$ y los campos vectoriales $\mathbf{f}(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$, $\mathbf{g}(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, u^2)$. Comprobar que las imágenes de \mathbf{f} y \mathbf{g} están contenidas en S ; estudiar si la inclusión es estricta.

23. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (y, xy, y^2 - x^2)$. Determinar el plano tangente a la superficie imagen en $f(1, 2)$.

24. Encontrar la ecuación del plano tangente al grafo de la función en el punto indicado así como la de la recta normal:

$$f(x, y) = \sin xy \text{ en } (1, \pi/2, 1) \quad f(x, y) = \frac{x^2}{x + y} \text{ en } (2, 2, 1)$$

$$f(x, y) = \log(x^2 + y) \text{ en } (1, 0, 0) \quad f(x, y) = x^2 e^{xy} \text{ en } (3, 0, 9)$$

25. Encontrar la ecuación del plano o recta tangente a la superficie o curva en el punto indicado así como la de la recta normal:

$$x \sin y + x^2 e^z = 4 \text{ en } (2, \pi, 0) \quad xz^2 + \frac{(2x - z)^2}{y^3} = 19 \text{ en } (2, 1, 3)$$

$$x^3 y - \frac{x^2}{y} = 4 \text{ en } (2, 1) \quad 3xe^y + xy^3 = 2 + x \text{ en } (1, 0)$$

26. Encontrar el punto de la superficie $z = x^2 + y^2$ donde el plano tangente es paralelo al plano $6x - 4y + 2z = 5$.

27. Encontrar el punto de la superficie $z = xy$ donde la recta normal es paralela a la recta $x = 3 - 2t$, $y = 4 + 5t$, $z = 3 + 3t$.

28. Encontrar todos los puntos de la superficie $z = x^2 y$ donde el plano tangente es ortogonal a la recta $x = 2 - 6t$, $y = 3 - 12t$, $z = 2 + 3t$.

29. Probar que las superficies

$$x^2 - 2y^2 + z^2 = 0 \quad \text{y} \quad xyz = 1$$

son ortogonales en todos los puntos de intersección. Es decir, las rectas normales a las curvas en estos puntos son ortogonales.

Lo mismo para las superficies:

$$x + y^2 + 2z^3 = 4 \quad \text{y} \quad 12x - (3 \log y) + z^{-1} = 13$$

30. Dado un campo escalar en \mathbb{R}^2 , $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ∇f define un campo vectorial de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 : $\nabla f = (D_1 f, D_2 f): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. ¿Qué relación hay entre las curvas de nivel de f y las líneas de campo de ∇f ?

31. Determinar en que puntos la expresión $z^3 + 3x^2z - xy = 0$ define a z como función de (x, y) y calcular en tal caso $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$; utilizar estas parciales para hallar el plano tangente a la superficie en el punto $(1, 4, 1)$.

32. Determinar en que puntos la expresión $\log(x^2 + y^2) - \arctg(y/x) = 0$ define a y como función de x y hallar $\frac{dy}{dx}$.

33. Determinar en que puntos el sistema

$$\begin{aligned} x^3z + y^3t^2 - 1 &= 0 \\ 2zt^3 + xy^2 &= 0 \end{aligned}$$

define a z y t como función de x e y : $(z, t) = \mathbf{f}(x, y)$. Hallar la matriz jacobiana de \mathbf{f} .

34. Probar que el campo $\mathbf{f}(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$ es localmente inversible, es decir, para cada punto de \mathbb{R}^2 existe un entorno donde la función es inversible.

35. Probar que el campo $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ es localmente inversible.

36. Dada $z = u(x, y)e^{ax+by}$ y sabiendo que $D_{12}u = 0$, Hallar valores constantes de a y b para que se verifique la ecuación:

$$D_{1,2}z - D_1z - D_2z + z = 0$$

37. La introducción de las coordenadas polares cambia $f(x, y)$ en $\phi(r, \theta)$ donde $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Expresar las derivadas parciales de segundo orden de ϕ en función de las derivadas de segundo orden de f . Repetir el ejercicio para campos en \mathbb{R}^3 y las coordenadas cilíndricas y esféricas.

38. a) Sea $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 con parciales continuas; llamamos *rotacional* de \mathbf{F} al campo vectorial

$$\text{rot} \mathbf{F} = (D_2 F_3 - D_3 F_2, D_3 F_1 - D_1 F_3, D_1 F_2 - D_2 F_1)$$

Demostrar que: si $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar con derivadas de segundo orden continuas, entonces $\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$.

Observación: si adoptamos la notación $\nabla = (D_1, D_2, D_3)$, se obtiene la igualdad "simbólica", $\text{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$. Por esta razón, el rotacional de un campo vectorial \mathbf{F} se denota igualmente $\nabla \times \mathbf{F}$.

b) Decimos que \mathbf{F} es *irrotacional* si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Comprobar si los siguientes campos son irrotacionales o no:

1) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 0)$

2) $\mathbf{G}(x, y, z) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$

39. Sea $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 con parciales continuas; llamamos *divergencia* de \mathbf{F} al campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = D_1 F_1 + D_2 F_2 + D_3 F_3$$

Decimos que \mathbf{F} es *solenoidal* si sus parciales de segundo orden son continuas y $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Demostrar que $\nabla \times \mathbf{F}$ es una campo solenoidal para cualquier campo vectorial \mathbf{F} cuyas parciales de segundo orden son continuas, es decir, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

40. Sea $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con las parciales de segundo orden continuas. Llamamos *laplaciana* de f al campo escalar

$$\nabla^2 f = D_{11} f + D_{22} f + D_{33} f$$

El operador ∇^2 se denomina *operador de Laplace* y decimos que el campo f es *armónico* si $\nabla^2 f = 0$. Hallar la laplaciana de los siguientes campos:

a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

b) $g(x, y, z) = xy + yz + xz$

41. a) Sea A una matriz $n \times n$ simétrica y sea q la función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n dada por:

$$q(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^t A \mathbf{u}$$

Escribir la expresión $q(\mathbf{u})$ por componentes y observar que es un polinomio de grado 2 sin términos de grado 0 o 1.

b) Sea $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio de grado 2 sin términos de grado 0 o 1. Utilizar el apartado anterior para encontrar una matriz A tal que $P(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^t A \mathbf{u}$.

c) Consideremos el polinomio $f(x, y) = 2 - x + 2y - 3xy + 2y^2 - x^2$. Usando el polinomio de Taylor y “sin derivar”, hallar el gradiente de f y la matriz hessiana en el punto $(0, 0)$ y en el punto $(1, 0)$.

d) Repetir el apartado anterior para el polinomio $f(x, y) = 1 + x - 3xy - x^2 + 2x^2y - x^3$ y para los puntos $(0, 0)$ y $(-1, 1)$.

42. Usar la diferencial para aproximar :

$$\begin{aligned} & \sqrt{2'95^2 + 4'01^2} \\ & 2'03^2 \cos(-0, 05) \end{aligned}$$

43. Identificar y clasificar (si existen) los puntos críticos de las siguientes funciones:

$$z = x^2 + (y - 1)^2$$

$$z = x^3 - 3xy^2 + y^2$$

$$z = x^2 - (y - 1)^2$$

$$z = x^2 y^3 (6 - x - y)$$

$$z = 1 + x^2 - y^2$$

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$z = (x - y + 1)^2$$

$$z = \operatorname{sen} x \cosh y$$

$$z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$$

$$z = e^{2x+3y} (8x^2 - 6xy + 3y^2)$$

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$$

$$z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$$

44. Sea $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$

a) Trazar una figura indicando el conjunto de puntos (x, y) en los que $f(x, y) \geq 0$.

b) Hallar los puntos (x, y) del plano en los que $D_1 f(x, y) = D_2 f(x, y) = 0$.

- c) ¿Cuáles de los puntos críticos son máximos locales? ¿Cuáles son mínimos locales? ¿Cuáles no son ni una cosa ni otra?
- d) ¿Tiene f un mínimo absoluto o un máximo absoluto en todo el plano?
45. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y determina con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo.
46. Hallar los valores extremos del campo escalar $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
47. Aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar las distancias máximas y mínimas de un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ a la recta $x + y = 4$
48. Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.
49. Calcular el valor máximo de $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeto a las restricciones $2x - y = 0$ e $y + z = 0$.
50. Hallar el valor máximo de $w = xyz$ entre todos los puntos pertenecientes a la intersección de los planos $x + y + z = 40$ y $z = x + y$.
51. Determinar todos los valores extremos absolutos y locales y los puntos silla para la función $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en el cuadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
52. En los siguientes apartados, hallar los máximos y mínimos absolutos de las funciones en los dominios dados:
- a) $D(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la placa triangular cerrada en el primer cuadrante acotada por las rectas $x = 0, y = 4, y = x$.
- b) $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3$.
- c) $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
- d) Hallar los puntos (x, y) y las direcciones para las que la derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ tiene valor máximo si (x, y) esta en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
53. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ en el círculo cerrado $x^2 + y^2 \leq 1$.
54. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$ en el triángulo limitado por las rectas $x = 0, y = 0, x + y = 6$.
55. Determinar las dimensiones de un estanque abierto rectangular que tiene la superficie mínima a condición de que su volumen sea igual a V : usar el método de los multiplicadores de Lagrange.
56. Hallar las dimensiones de un paralelepípedo rectangular que tiene el volumen máximo para una superficie total dada S .