

Introducción al hormigón pretensado

Prefacio

Lo siguiente es una introducción al tema de hormigón pretensado.

En ella se pretende explicar el modo de funcionamiento del pretensado, así como brindar las bases para el cálculo de estructuras con estos materiales. Sin embargo el tema no está tratado en su totalidad. Está limitado a considerar tensiones normales de flexión en vigas isostáticas, y a brindar orientación para seleccionar la excentricidad del cable y la la fuerza de pretensión.

1 Introducción

El hormigón posee una buena resistencia a la compresión y resulta un material versátil para su uso en estructuras. Su principal inconveniente, no obstante, es su desigual resistencia: ésta es muy pequeña a tracción. Este motivo obliga a suplir esta carencia mediante armaduras que tomen las tensiones de tracción resultando de esta manera el conocido material *hormigón armado*.

La idea del *pretensado* es la de introducir un estado de tensión, previo a la carga de la estructura, de manera tal que anule, o disminuya, las tensiones de tracción en el hormigón. Esta idea puede ser comprendida fácilmente mediante un ejemplo. Considérese una viga isostática simple con una carga uniformemente distribuida q , como en la figura 1.

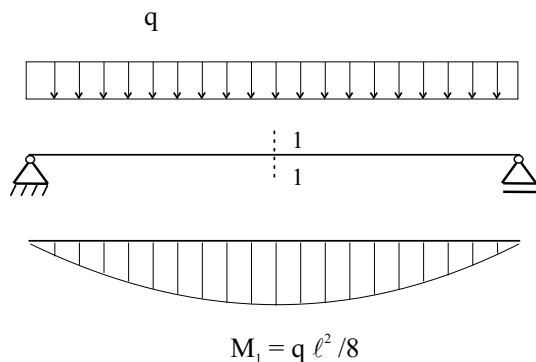


Figura 1: Viga simplemente apoyada con carga distribuida

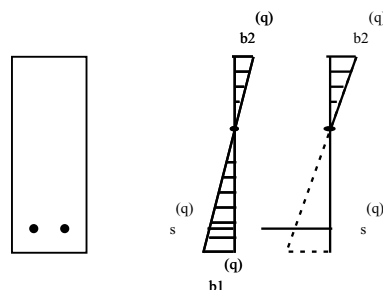


Figura 2: Deformaciones y tensiones debido a la carga q

El estado tensional en la sección más solicitada de la viga se muestra en la figura 2, considerando un material ideal, homogéneo, elástico lineal, que no soporta tensiones de tracción. Se ha indicado con un supraíndice la causa de las deformaciones o tensiones. En este caso la carga externa q .

Una primera mejora que se podría hacer, para disminuir las tensiones de tracción, es el agregado de una fuerza compresiva centrada P en la sección transversal (figura 3). Esta fuerza podría ser aplicada mediante algún dispositivo como carga externa, pero también lo puede ser a través de un cable (o una barra) en el interior de la viga, que sea estirado hasta alcanzar determinado estado de tensión, y luego anclado sobre los extremos de la viga. De este modo el cable produce un estado de compresión sobre la viga y ésta un estado de tracción sobre el cable. Globalmente estas fuerzas están equilibradas. De esta última forma es como se utiliza el pretensado en estructuras de hormigón.

El estado de deformaciones y tensiones, en la sección central de la viga, debido a esta fuerza se muestra en la figura 4-a. Si se superponen los efectos de los dos estados de carga (figuras 2 y 4-a), se obtiene un diagrama como el indicado en la figura 4-b.

Se observa allí que adoptando adecuadamente el valor de P se puede compensar completamente las tensiones de tracción. Sin embargo el diagrama final muestra al material trabajando en forma no uniforme: hay zonas con elevadas compresiones y otras con tensiones nulas.

Una segunda mejora, tendiente a un mejor uso del material se puede obtener si se aplica la fuerza P con una excentricidad e como se muestra en la figura 5.

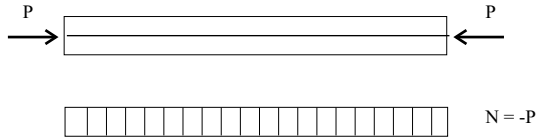


Figura 3: Fuerza de pretensado centrada en los extremos de viga

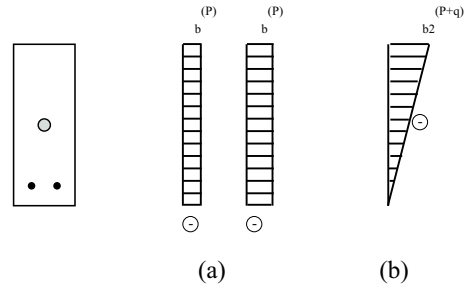


Figura 4: Deformaciones y tensiones: (a) debidas a la fuerza P ; (b) debidas a $(P+q)$

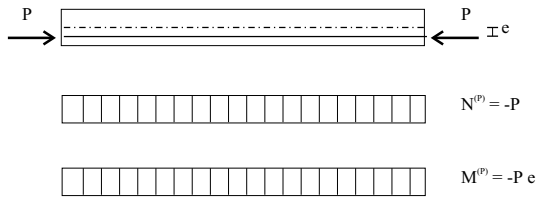


Figura 5: Fuerza de pretensado excéntrica

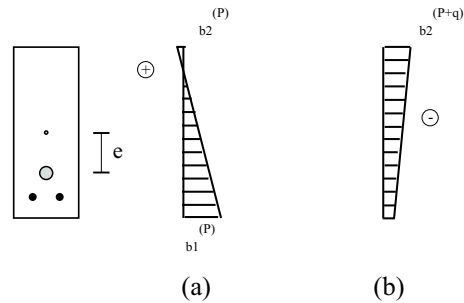


Figura 6: Deformaciones y tensiones: (a) debidas a la fuerza P ; (b) debidas a $(P+q)$

En este caso la viga se encuentra sometida, por parte de P , a compresión y flexión con el estado tensional indicado en la figura 6-a. Nuevamente, se puede ajustar los valores de e y P de modo de obtener algún diagrama como el de la figura 6-b.

Finalmente cabe observar que el diagrama de tensiones sobre el que se ha trabajado es el de la sección central de la viga. Pero si el valor y excentricidad de la fuerza P ha sido calculado buscando anular las tensiones en la sección central, en otras secciones de la viga las tensiones debidas a P quedan como estados dominantes. Esto se debe a que los diagramas de $N^{(P)}$ y $M^{(P)}$ son constantes mientras que los de $N^{(q)}$ y $M^{(q)}$ no lo son. Una última mejora que se puede hacer en vista de esto es dar al cable una curvatura como en la figura 7.

De este modo, además de las fuerzas P concentradas en los anclajes - como en el caso anterior - se tiene una carga transversal w que posee signo distinto al de la carga externa q y produce un diagrama de momentos flectores como el de la figura 7. Esto permite una mejor distribución de las tensiones a lo largo de la viga.

El hormigón pretensado permite usar aceros de alta resistencia, que no se podrían usar en hormigón armado. Esto es debido a que hay un *pre-alargamiento* que permite llegar a las deformaciones $(\epsilon^{(P)} + \epsilon^{(q)})$ en el acero. No se podría alcanzar estas deformaciones en hormigón

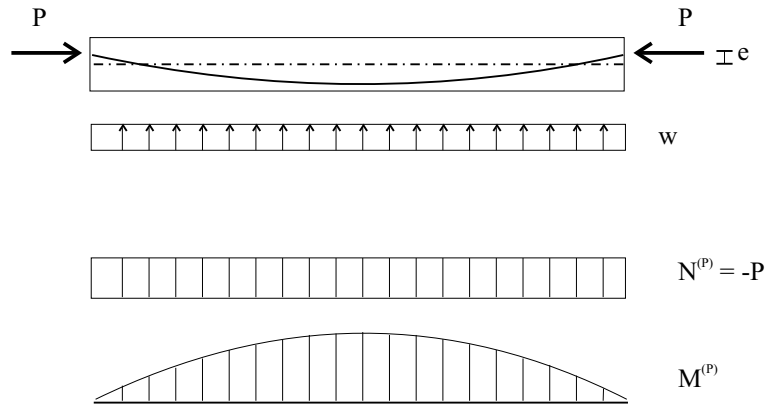


Figura 7: Fuerza de pretensado con cable curvo

armado pues por la adherencia entre el hormigón y el acero ambos deben deformarse lo mismo y estas deformaciones serían inaceptables en el hormigón.

1.1 Características del pretensado

El hormigón pretensado requiere utilizar material de alta calidad, tanto para el hormigón como para el acero.

El valor de la carga de pretensado no permanece constante a lo largo del tiempo. Debido a los efectos de deformaciones diferidas (relajación del acero, fluencia lenta del hormigón) su valor va disminuyendo en el tiempo hacia un valor asintótico. Debido a esto hay que tener en cuenta los distintos valores de la fuerza P en el cálculo de las tensiones.

Las condiciones de resistencia de la estructura deben verificarse a lo largo de la historia de la misma. Hay estados tensionales diferentes durante las etapas de la construcción; la puesta en tensión de los cables o barras de pretensado; los estados de carga permanentes; los estados de cargas permanentes más variables; etc. Y a ello se debe agregar lo dicho acerca de la variación de fuerza de pretensado en el tiempo. Todo esto hace que deban verificarse no uno, sino varios estados de tensiones en la estructura.

Entre las ventajas que ofrece el uso del hormigón pretensado puede citarse:

1. Permite aprovechar materiales de alta resistencia, lo que conduce a estructuras más esbeltas y livianas;
2. Presenta deformaciones reducidas. Esto posibilita que bajo cargas de servicio el hormigón permanezca en estado I (no fisurado);
3. Reduce las fisuras y aumenta la durabilidad de la estructura;
4. Presenta una alta resistencia a la fatiga. La fatiga depende de la relación entre la variación de tensiones ($\Delta\sigma$) y las tensiones medias (σ_m). Mientras $\Delta\sigma$ es la misma ya sea pretensado o no (depende de la variación de cargas externas), el valor de σ_m aumenta, con lo que la relación ($\frac{\Delta\sigma}{\sigma_m}$) disminuye en el acero;
5. Soporta mejor excesos de carga sin sufrir daños permanentes. Las fisuras se cierran bajo la fuerza P una vez que desaparece la sobrecarga que las produjo.

1.2 Tipos de pretensado

Se utiliza una terminología para referirse a los distintos tipos de pretensado.

Pretensado en banco o pretensado con adherencia inmediata:

Este es el pretensado de piezas prefabricadas. Se realiza en plantas donde se coloca el cable en el molde de la pieza; se pone en tensión; luego se hormigona y cuando el hormigón está seco y ha endurecido se corta los extremos del cable que trata de contraerse poniendo así en tensión al hormigón.

En general los cables son rectos, pero puede -mediante un desvío- darsele forma poligonal. También se utiliza en caños o tubos, en forma de hélice dando un estado de pretensión circunferencial.

Pretensado con adherencia posterior:

A veces se lo denomina *postesado*, si bien continua siendo un pre-tensado en el sentido que las tensiones que se agregan a la estructura se hacen *previamente* a que ella sea solicitada por los estados de carga debido a la utilización de la misma.

En este caso se dejan *vainas* incluidas en la pieza de hormigón, por donde se insertan los cables para pretensado. Luego se pone en tensión a los cables mediante *gatos*. Alcanzada la tensión se *anclan* los cables a la estructura a través de dispositivos específicos (*anclajes*). Finalmente se rellena el espacio entre la vaina y el cable inyectando un mortero.

Pretensado con adherencia:

El caso descripto, en el cual se inyecta un mortero para dar adherencia entre cable y vaina, corresponde a este tipo de pretensado con adherencia.

Pretensado sin adherencia:

En este caso no se realiza la inyección. El pretensado sin adherencia permite un fácil reemplazo de los cables.

En cuanto al *grado de pretensado*, se puede distinguir:

- *Pretensado total:* cuando la fuerza P se coloca de manera de eliminar completamente las tensiones de tracción del hormigón;
- *Pretensado limitado:* en este caso no se elimina completamente la tracción en el hormigón, pero se mantiene los valores de tensión por debajo de la resistencia a tracción del hormigón;
- *Pretensado parcial:* en este caso no se elimina la tracción y tampoco se mantiene por debajo de la resistencia del hormigón. Pero para evitar la fisuración se coloca una armadura convencional (no tesada), como en hormigón armado.
- *Pretensado moderado o constructivo:* en este caso el pretensado no se utiliza para dotar capacidad portante a la estructura, sino para evitar la fisuración de la misma.

2 Solicitaciones y tensiones debidas al pretensado

La acción del cable de pretensado sobre la estructura de hormigón se manifiesta en un conjunto de fuerzas:

- fuerzas concentradas en los anclajes
- fuerzas de desvío debido a la curvatura. Estas fuerzas se producen cuando el cable no es recto y son fuerzas distribuidas dirigidas hacia el centro de curvatura. En el caso límite de un quiebre en la línea del trazado del cable, se manifiesta una fuerza concentrada.
- fuerzas de fricción, que se producen entre el cable y la vaina.

Para determinar las tensiones producidas por el pretensado, se puede usar dos métodos conocidos como *método interno* y *método directo*. Lo que sigue se circunscribe al caso de una viga isostática.

2.1 Método interno

Se denomina así pues se analiza una sección de la viga. El cable pasa por esa sección con una excentricidad e con respecto al baricentro y una inclinación ϕ (figura 8).

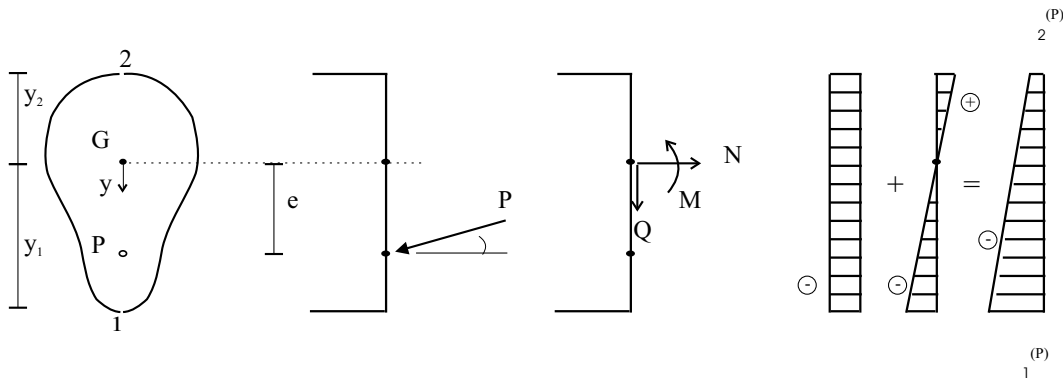


Figura 8: Solicitaciones y tensiones debidas al pretensado

Los esfuerzos internos debido al pretensado son:

$$\begin{aligned} N^{(P)} &= -P \cos \phi \\ Q^{(P)} &= P \sin \phi \\ M^{(P)} &= -P \cos \phi e \end{aligned}$$

En el caso de vigas esbeltas, o bien cuando el cable tiene poca curvatura ($f < l/12$), pueden simplificarse las expresiones anteriores (aceptando que $\cos \phi \simeq 1$):

$$\begin{aligned} N^{(P)} &= -P \\ Q^{(P)} &= P \sin \phi \\ M^{(P)} &= -P e \end{aligned}$$

Las tensiones, en los puntos extremos de la sección 1 y 2, debidas al pretensado son

$$\begin{aligned} \sigma_2^{(P)} &= \frac{(-P)}{A_n} - \frac{(-Pe)}{W_{n2}} \\ \sigma_1^{(P)} &= \frac{(-P)}{A_n} + \frac{(-Pe)}{W_{n1}} \end{aligned}$$

donde A_n es el área de la sección neta (descontando el agujero de la vaina), y W_{n1} es el módulo resistente de la sección neta con respecto al punto 1, y análogamente para el punto 2.

Si ahora se consideran las tensiones producidas por los diversos estados de carga que soportará la estructura, éstas se deben sumar a las tensiones producidas por el pretensado. Por ejemplo, si se simplifican los estados de carga designando con g a las cargas permanentes debidas al peso propio de la viga, y con p a la sobrecarga, el momento mínimo será $M^{(g)}$ y el momento máximo $M^{(g+p)}$. Las tensiones, cuando se suma el estado de cargas ($g+p$) son:

$$\sigma_2^{(P+g+p)} = \frac{(-P)}{A_n} - \frac{(-Pe) + M^{(g)}}{W_{n2}} - \frac{M^{(p)}}{W_{i2}}$$

$$\sigma_1^{(P+g+p)} = \frac{(-P)}{A_n} + \frac{(-Pe) + M^{(g)}}{W_{n1}} + \frac{M^{(p)}}{W_{i1}}$$

En éstas últimas ecuaciones, W_{i1} hace referencia al módulo resistente de la sección ideal, del hormigón y el cable, una vez que se ha inyectado el mortero que brinda adherencia entre ambos (figura 9).

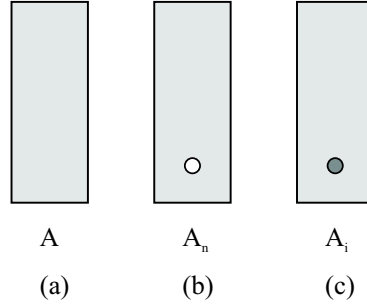


Figura 9: Sección de la viga: (a) bruta; (b) neta; (c) ideal

En cálculos aproximados puede escribirse:

$$\sigma_2^{(P+g+p)} = \frac{(-P)}{A} - \frac{(-Pe) + M^{(g)} + M^{(p)}}{W_2}$$

$$\sigma_1^{(P+g+p)} = \frac{(-P)}{A} + \frac{(-Pe) + M^{(g)} + M^{(p)}}{W_1}$$

donde se considera que todas las sollicitaciones actúan sobre la sección bruta de hormigón.

2.2 Método directo

En el método directo se colocan sobre la viga de hormigón todas las acciones que produce el pretensado, como cargas externas. Así para la viga de la figura 10 se colocan las cargas equivalentes al pretensado, indicadas en la figura 11.

Las fuerzas de desvío están dirigidas hacia el centro de curvatura del cable. Para flechas pequeñas se puede suponer que estas fuerzas distribuidas son verticales y, si la curvatura es constante, que esas cargas distribuidas también son constantes. El valor de la carga distribuida equivalente es:

$$w = \frac{P}{r}$$

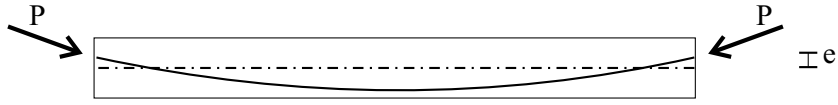


Figura 10: Viga simplemente apoyada pretensada

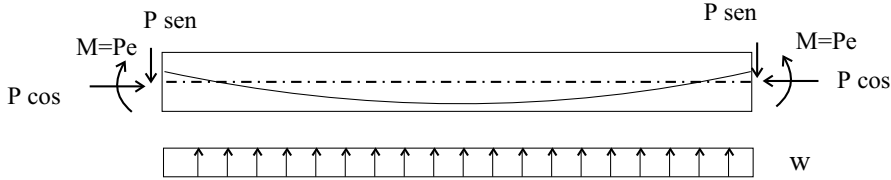


Figura 11: Cargas equivalentes al pretensado

donde r es el radio de curvatura del cable. Si el cable tiene trazado circular, entonces

$$w \simeq \frac{8fP}{l^2 + 4f^2}$$

y si el trazado es parabólico:

$$w \simeq \frac{8fP}{l^2}$$

siendo f la flecha y l la longitud del cable.

Si el cable presenta un quiebre en su trazado, la fuerza de desvío es una fuerza concentrada en la bisectriz del ángulo que forman los tramos rectos, y su valor es:

$$W \simeq P \operatorname{tg}\beta$$

siendo β el ángulo de desvío del cable.

Por ejemplo, en un caso más general, donde el cable cambie de curvatura, como en la figura 12, las cargas distribuidas, equivalentes al pretensado se pueden evaluar como:

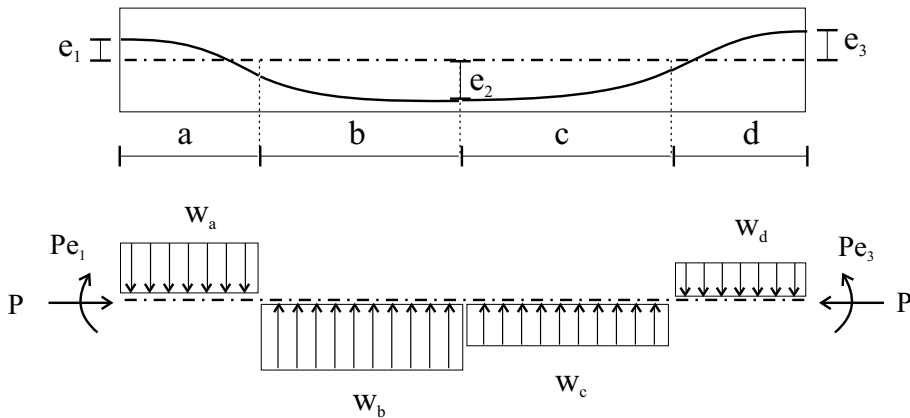


Figura 12: Caso de cable con cambios de curvatura.

$$w_a = -\frac{2P(e_1 + e_2)}{a(a + b)}$$

$$w_b = \frac{2P(e_1 + e_2)}{b(a + b)}$$

$$w_c = \frac{2P(e_2 + e_3)}{c(c + d)}$$

$$w_d = -\frac{2P(e_2 + e_3)}{d(c + d)}$$

El método directo presenta como ventajas:

- es aplicable a cualquier tipo de estructuras;
- es aplicable a estructuras isostáticas e hiperestáticas;
- es utilizable en programas estándar de análisis estructural.

3 Pérdidas de pretensado

3.1 Retracción y fluencia lenta del hormigón

La deformación del hormigón bajo tensión constante puede escribirse:

$$\epsilon_b(t) = \epsilon_{be} + \epsilon_b^{(R)}(t) + \epsilon_b^{(F)}(t)$$

En esta expresión ϵ_{be} es la *deformación elástica* (instantánea, no dependiente del tiempo); $\epsilon_b^{(R)}(t)$ es la *deformación por retracción*; y $\epsilon_b^{(F)}$ es la *deformación por fluencia lenta*. Las dos últimas varían con el tiempo.

La *deformación elástica* es:

$$\epsilon_{be} = \frac{\sigma_b}{E_b}$$

donde σ_b es la tensión a que está sometido el hormigón y E_b es su módulo elástico.

La *retracción* se produce debido a la pérdida de agua durante el secado de la pasta de hormigón. Parte del agua con que se construye el hormigón se consume en la reacción química, la restante permanece en los poros y se va perdiendo al secarse el hormigón. Esto produce la retracción. Si, por el contrario, una pieza de hormigón se coloca en un ambiente donde pueda absorber agua (sumergido en agua, o en un ambiente de alta humedad) se produce una *expansión* del mismo. La variación de la retracción, con el tiempo, depende de varios factores:

- *climáticos*: la retracción depende de la humedad y de la temperatura ambiente. A mayor temperatura aumenta la retracción. A mayor sequedad, también aumenta la retracción.
- *edad*: el grado de madurez del hormigón, cuando comienza el proceso de secado, influye sobre la retracción. Esta es mayor cuando el secado comienza a edad más temprana (figura 13).
- *dimensiones*: el espesor de las piezas de hormigón influye en el secado y, por lo tanto, en la retracción: piezas más delgadas sufren mayor retracción.
- *composición del hormigón*:

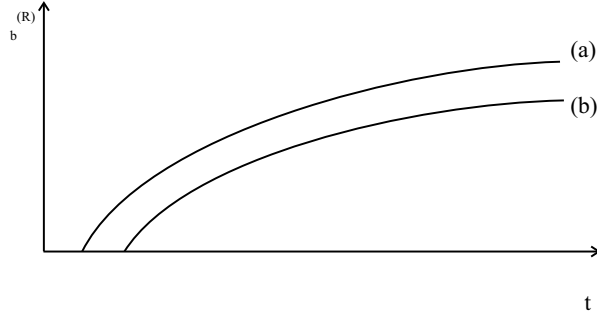


Figura 13: Variación de la retracción con el tiempo. (a) probeta comenzada a secar a edad más temprana; (b) probeta comenzada a secar a edad más tardía.

- *agua*: dado que la retracción se produce por la pérdida de agua, cuanto mayor agua contenga la mezcla, mayor será su retracción. Se trata de mantener la relación agua/cemento en valores $\frac{a}{c} < 0.50$ ($\frac{a}{c} < 0.40$ en prefabricación)
- *cemento*: no debería usarse altos contenidos de cemento pues para una dada relación $\frac{a}{c}$ conlleva a un mayor contenido de agua. Los cementos de alta resistencia inicial también producen mayor retracción.
- *áridos*: los áridos de tipo arenizcas producen mayores valores de retracción.

Hay varias formas de estimar el valor de la retracción. Las normas DIN 4227 utilizan la siguiente fórmula:

$$\epsilon_b^{(R)}(t) = \epsilon_{b0}^{(R)} (\phi_R(t_w) - \phi_R(t_{w0}))$$

donde $\epsilon_b^{(R)}(t)$ es la deformación por retracción para un tiempo t ; $\epsilon_{b0}^{(R)}$ es el valor básico de retracción dado en tabla 1; y $\phi_R(t)$ es una función del tiempo, dada en la figura 14, que depende también del espesor ficticio d_w . El espesor ficticio se toma aproximado a:

$$d_w = k_{ef} \frac{2A}{U}$$

siendo A el área de la sección transversal; U su perímetro; y k_{ef} un coeficiente dependiente de la humedad relativa, dado en la tabla 1.

Dado que la retracción depende de la temperatura ambiente, el tiempo t en el que se evalúa la retracción debe ser referido a las temperaturas que ha soportado el hormigón. Se toma como referencia la temperatura de $20^\circ C$ y se calcula una *edad efectiva*:

$$t_w = z \sum_i \frac{T_i + 10^\circ C}{30^\circ C} t_i$$

donde t_i es la cantidad de días que el hormigón ha estado sometido a la temperatura T_i . En esa fórmula $z = 1$ para cementos normales; $z = 2$ para cementos rápidos; y $z = 3$ para cementos rápidos y de alta resistencia.

El tiempo t_{w0} que figura en la fórmula de $\epsilon_b^{(R)}$ es la edad efectiva a la que se comienza el secado del hormigón, y se calcula con la misma fórmula que t_w , con $z = 1$.

La *fluencia lenta* es una deformación que se produce en una pieza de hormigón cargada. Se verifica que bajo carga constante las deformaciones continúan produciéndose en el tiempo. También

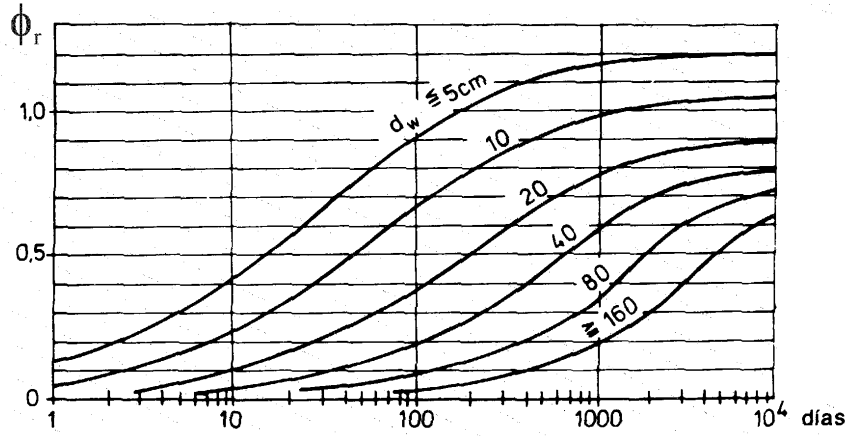


Figura 14: Función para el cálculo de la variación de la retracción en el tiempo ϕ_R

Tabla 1: Valores básicos de retracción y fluencia lenta, y coeficiente de espesor ficticio

Medio ambiente	Humedad relativa	$\epsilon_{b0}^{(R)}$	ϕ_0	k_{ef}
Agua		$+10 \cdot 10^{-5}$	0.8	30
Aire muy húmedo	90%	$-13 \cdot 10^{-5}$	1.3	5
Aire libre en general	70%	$-32 \cdot 10^{-5}$	2.0	1.5
Aire seco	50%	$-46 \cdot 10^{-5}$	2.7	1

Tabla 2: Valores de la función temporal de retracción y fluencia lenta, para tiempo muy largo

Espesor ficticio	$\phi_R(\infty)$	$\phi_f(\infty)$	$\phi_v(\infty)$
$\leq 5cm$	1.20	1.85	1.0
10 cm	1.05	1.70	1.0
20 cm	0.90	1.55	1.0
40 cm	0.80	1.40	1.0
80 cm	0.75	1.25	1.0
$\geq 160cm$	0.70	1.12	1.0

aquí el agua libre en los poros, bajo la tensión, va perdiéndose por evaporación y se produce un cambio de volumen.

La fluencia lenta consta de dos partes. Una es la *fluencia*, de carácter irreversible; y otra la *fluencia lenta reversible* o *elasticidad diferida*, de modo que se puede escribir:

$$\epsilon_b^{(F)}(t) = \epsilon_b^{(Fi)}(t) + \epsilon_b^{(Fr)}(t)$$

siendo los dos términos las partes irreversible y reversible, respectivamente.

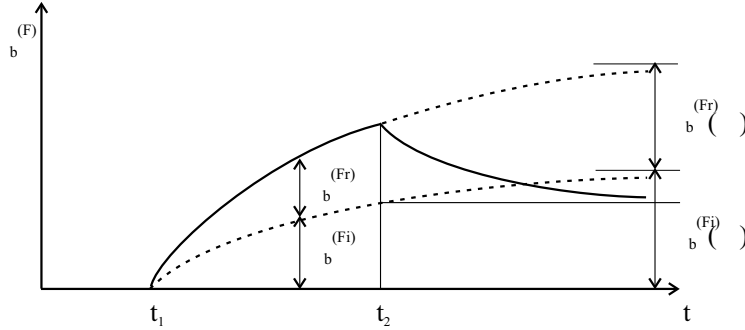


Figura 15: Variación de la fluencia lenta con el tiempo. Diagrama esquemático que muestra las partes reversible e irreversible, para una probeta sometida a tensión constante en el instante t_1 y descargada en el instante t_2

La fluencia lenta está influenciada por los mismos factores climáticos, dimensionales, etarios y composicionales, indicados para la retracción.

La parte irreversible de la fluencia lenta se puede evaluar mediante:

$$\epsilon_b^{(Fi)}(t) = \frac{\sigma_b}{E_b} \phi_0 (\phi_f(t_w) - \phi_f(t_{w1}))$$

siendo σ_b la tensión a que está sometido el hormigón; E_b su módulo elástico a los 28 días; ϕ_0 el coeficiente básico de fluencia lenta, dado en la tabla 1; y ϕ_f una función del tiempo que también depende del espesor efectivo y se muestra en la figura 16. Los tiempos t_w y t_{w1} son los tiempos efectivos en que se evalúa la deformación, y en que se comienza la carga constante, respectivamente.

La parte reversible de la fluencia lenta se puede escribir:

$$\epsilon_b^{(Fr)}(t) = \frac{\sigma_b}{E_b} 0.4 \phi_v(t_w - t_{w1})$$

siendo la función ϕ_v dada en la figura 17.

Los valores asintóticos de las funciones ϕ_R , ϕ_f y ϕ_v se dan en la tabla 2.

3.2 Evaluación de las pérdidas de pretensado diferidas en el tiempo

Debido a las deformaciones diferidas en el tiempo en el hormigón y la relajación en el acero, la fuerza de pretensado disminuye en el tiempo. Para un tiempo suficientemente largo se puede escribir la fuerza de pretensado:

$$P_\infty = P_0 - \Delta P$$

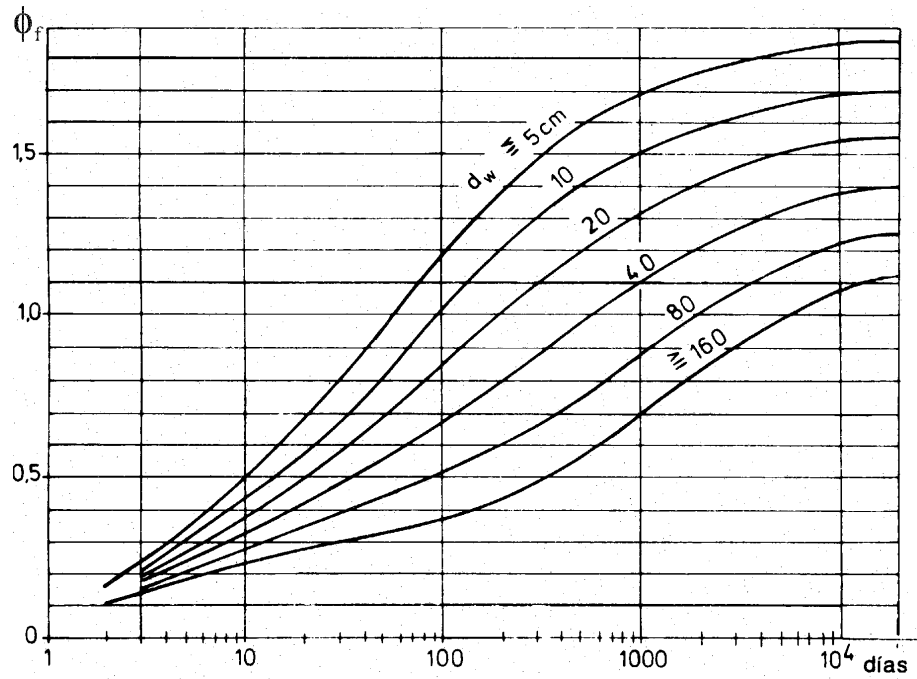


Figura 16: Función para el cálculo de la variación temporal de la fluencia lenta irreversible ϕ_f

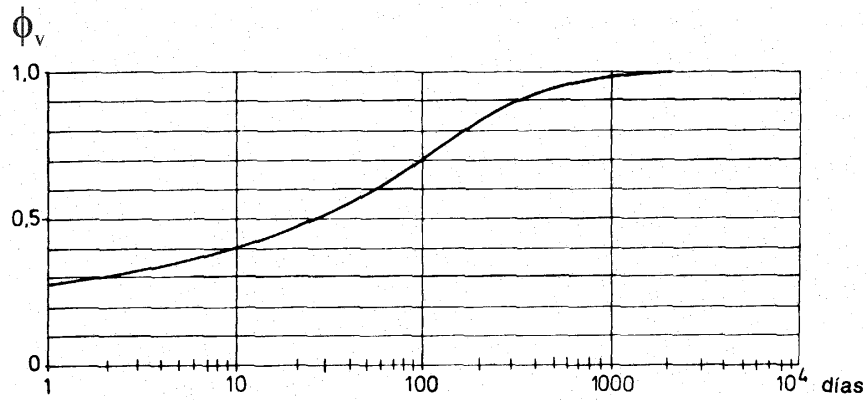


Figura 17: Función para el cálculo de la variación de la fluencia lenta reversible en el tiempo ϕ_v . Se entra, en abcisas, con la diferencia $(t_w - t_{w1})$ entre el tiempo en que se evalúa la fluencia lenta y aquel en que se produjo la carga (constante).

siendo P_0 la fuerza inicial, de tesado; P_∞ la fuerza para un tiempo muy largo; y ΔP , las pérdidas producidas.

Si se tienen en cuenta las pérdidas producidas por la retracción y fluencia lenta del hormigón, la pérdida de tensión en el acero pretensado puede escribirse:

$$\Delta\sigma_z^{(R+F)} = \frac{\Delta\epsilon_b^{(R)} E_z + n\phi(\sigma_b^{(g)} + \sigma_b^{(P_0)})}{1 - n \frac{\sigma_b^{(P_0)}}{\sigma_z^{(P_0)}} (1 + \rho\phi)}$$

En esta expresión:

$\Delta\sigma_z^{(R+F)}$ es la pérdida de tensión en el acero pretensado, debido a la retracción y fluencia lenta del hormigón;

$\Delta\epsilon_b^{(R)}$ es la retracción del hormigón a la altura del cable de pretensado, en un instante t determinado. Si se desea evaluar la pérdida total, se tomará en el tiempo $t = \infty$;

$$n = \frac{E_z}{E_b};$$

E_z el módulo elástico del acero de pretensado;

E_b el módulo elástico del hormigón;

$\phi = \phi_0(\phi_f(t_w) - \phi_f(t_{w1})) + 0.4 \phi_v(t_w - t_{w1})$ es el valor de la fluencia lenta en un instante t considerado. Si se desea evaluar la pérdida total, se tomará en el tiempo $t = \infty$;

$\sigma_b^{(g)}$ es la tensión en el hormigón, a la altura del cable de pretensado, debidas a las cargas permanentes g (o bien $(g + \psi p)$ siendo ψ un factor entre 0 y 1, que permite considerar parte de la sobrecarga que pueda actuar durante un tiempo prolongado);

$\sigma_b^{(P_0)}$ es la tensión en el hormigón, a la altura del cable de pretensado, debidas a la acción del pretensado inicial;

$\sigma_z^{(P_0)}$ es la tensión inicial en el cable de pretensado.

ρ es el coeficiente de relajación, cuyo valor se toma frecuentemene $\rho = \frac{1}{2}$.

Si se agrega el efecto de la relajación del acero, se puede escribir:

$$\Delta\sigma_z^{(R+F+r)} = \frac{\Delta\epsilon_b^{(R)} E_z + n\phi(\sigma_b^{(g)} + \sigma_b^{(P_0)}) - \Delta\epsilon_z^{(r)} E_z}{1 - n \frac{\sigma_b^{(P_0)}}{\sigma_z^{(P_0)}} (1 + \rho\phi)}$$

En ésta fórmula se puede introducir un valor estimado de $\Delta\sigma_z^{(R+F+r)}$ y se determina

$$\Delta\epsilon_z^{(r)} E_z = \Delta\sigma_z^{(r)}$$

para una tensión:

$$\sigma_z = \sigma_z^{(g+P_0)} - 0.3 \Delta\sigma_z^{(R+F+r)}$$

este valor se incorpora en la fórmula y se itera hasta alcanzar un valor estable.

Leonhardt, utiliza la expresión indicada de $\Delta\sigma_z^{(R+F)}$ como una forma práctica de estimar la pérdida de pretensado. Si se observa que:

$$P_0 = \sigma_z^{(P_0)} A_z$$

la expresión de la pérdida de fuerza de tesado puede escribirse:

$$\Delta P = P_0 \frac{\Delta \epsilon_b^{(R)} E_z + n\phi(\sigma_b^{(g)} + \sigma_b^{(P_0)})}{\sigma_z^{(P_0)} - n\sigma_b^{(P_0)}(1 + \rho\phi)}$$

o bien, si se expresa en función del valor final P_∞ :

$$-\Delta P = P_\infty \frac{\Delta \epsilon_b^{(R)} E_z + n\phi(\sigma_b^{(g)} + \sigma_b^{(P_\infty)})}{\sigma_z^{(P_\infty)} - n\sigma_b^{(P_\infty)}(1 + \rho\phi)}$$

En cálculos aproximados, puede despreciarse el término $n\sigma_b^{(P_\infty)}(1 + \rho\phi)$ frente a $\sigma_z^{(P_\infty)}$ y escribirse entonces:

$$\Delta \sigma_z^{(R+F)} = \Delta \epsilon_b^{(R)} E_z + n\phi(\sigma_b^{(g)} + \sigma_b^{(P_0)})$$

La relación entre P_∞ y P_0 puede escribirse:

$$\frac{P_\infty}{P_0} = 1 - \frac{\Delta P}{P_0} = 1 + \frac{\Delta \epsilon_b^{(R)} E_z + n\phi(\sigma_b^{(g)} + \sigma_b^{(P_\infty)})}{\sigma_{z,adm}^{(P_0)} - n\sigma_b^{(g+p)}}$$

y en general, para predimensionamiento, se toma esta relación entre 0.8 y 0.9.

Finalmente se indicará que la sección necesaria de acero para pretensado resulta de:

$$\sigma_z^{(P_0)} + \sigma_z^{(g+p)} \leq \sigma_{z,adm}$$

y el área necesaria de acero pretensado:

$$A_{z,nec} = \frac{|P_0|}{\sigma_{z,adm} - \sigma_z^{(g+p)}}$$

4 Determinación de la fuerza de pretensado y trazado del cable

A continuación se considera una viga simple isostática, sometida a estados de cargas permanentes y variables, para la que se desea calcular la fuerza de pretensado y la posición del cable de manera de verificar criterios de proyecto con respecto a tensiones en una sección crítica de la viga. Se supondrá que las cargas son cargas gravitacionales distribuidas, que fluctúan entre un mínimo g y un máximo $g + p$, de modo que los momentos extremos en la sección son:

$$M_{min} = M^{(g)}$$

$$M_{max} = M^{(g+p)}$$

y la variación:

$$\Delta M = M^{(g+p)} - M^{(g)}$$

Las incógnitas serán la fuerza de tesado P_0 y su excentricidad e , y estas se calculan para las cargas de servicio.

4.1 Grado de pretensado

Lo primero a hacer es fijar el grado de pretensado de la viga. Hay distintas definiciones para este grado de pretensado.

a) Leonhardt determina el grado de pretensado calculado como:

$$\kappa = \frac{M_D}{\max M^{(g+p)}}$$

donde M_D es denominado *momento de descompresión* y es aquel que produce la tensión $\sigma_b = 0$ en la fibra más traccionada del hormigón, para el estado de carga $(g + \psi p + P_\infty)$. Aquí P_∞ es la fuerza de pretensado una vez descontada las pérdidas, y ψp es una fracción de la sobrecarga. Así:

- si M_D produce $\sigma_b = 0$ para $(g + p + P_\infty)$, entonces $\kappa = 1$ y estamos en presencia de pretensado total;
- si M_D produce $\sigma_b = 0$ para $(g + \psi p + P_\infty)$, entonces $\kappa < 1$ y estamos en presencia de pretensado parcial o limitado.

b) El CEB-FIP propone un grado de pretensado dado por:

$$\lambda = \frac{A_{sp} f_{0.1k}}{A_{sp} f_{0.1k} + A_s f_{yk}}$$

donde A_{sp} es la sección de acero pretensado; $f_{0.1k}$ es la tensión de fluencia (0.1%) convencional del acero pretensado; A_s es el área de la sección de acero convencional (no tesado); y f_{yk} es la tensión de fluencia del acero convencional.

Se aconseja elegir el grado de pretensado de manera que bajo cargas muy frecuentes, o de larga duración, la tensión en el de tracción en el hormigón sea $\sigma_b = 0$.

4.2 Centro de presión

Considérese una sección de la viga, bajo la acción de las fuerzas de pretensado solamente (figura 8). Las tensiones en los punto 1 y 2 son:

$$\begin{aligned}\sigma_2^{(P)} &= \frac{(-P)}{A} - \frac{(-Pe)}{W_2} \\ \sigma_1^{(P)} &= \frac{(-P)}{A} + \frac{(-Pe)}{W_1}\end{aligned}$$

Recordando que

$$W_2 = \frac{I}{y_2} = \frac{Ai^2}{y_2}$$

donde I es el momento de inercia y A el área, de la sección, y i es el radio de giro de la misma, se puede escribir (y análogamente para el punto 1):

$$\sigma_2^{(P)} = \frac{P}{A} \left(-1 + \frac{e y_2}{i^2} \right)$$

$$\sigma_1^{(P)} = \frac{P}{A} \left(-1 - \frac{e y_1}{i^2} \right)$$

Si ahora se tiene presente la definición de *núcleo central* como aquel delimitado por las coordenadas $y = e_1$ e $y = -e_2$ tal que una carga compresiva en su interior no produce tensiones de tracción, se tiene que

- si la carga tiene una excentricidad $e = e_1$ la tensión en el punto 2 es nula ($\sigma_2 = 0$) y de allí:

$$e_1 = \frac{i^2}{y_2}$$

- si la carga tiene una excentricidad $e = -e_2$ la tensión en el punto 1 es nula ($\sigma_1 = 0$) y de allí:

$$e_2 = \frac{i^2}{y_1}$$

sustituyéndose estas expresiones en las fórmulas para las tensiones, puede ponerse:

$$\sigma_2^{(P)} = \frac{P}{A} \left(-1 + \frac{e}{e_1} \right)$$

$$\sigma_1^{(P)} = \frac{P}{A} \left(-1 - \frac{e}{e_2} \right)$$

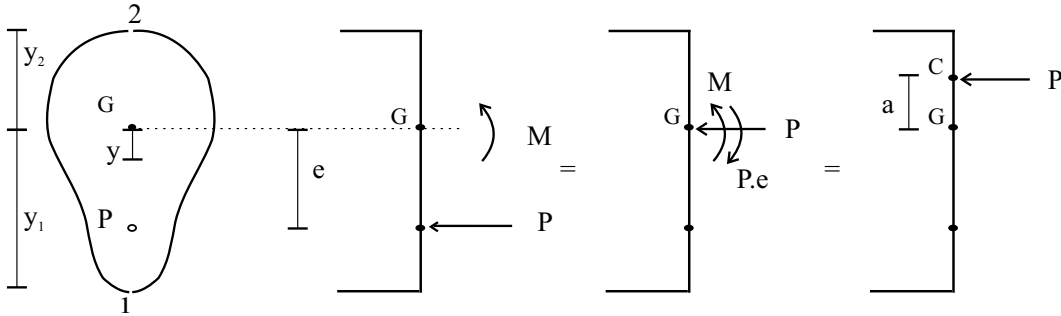


Figura 18: Centro de presión

Si ahora se agrega el efecto de las cargas externas, por ejemplo el momento $M = M^{(q)} = M^{(g+\psi p)}$:

$$\sigma_2^{(P+g+\psi p)} = \frac{P}{A} - \frac{-Pe + M}{W_2} = \frac{P}{A} \left(-1 + \frac{e - \frac{M}{P}}{\frac{W_2}{A}} \right) = \frac{P}{A} \left(-1 + \frac{a y_2}{i^2} \right)$$

$$\sigma_1^{(P+g+\psi p)} = \frac{P}{A} + \frac{-Pe + M}{W_1} = \frac{P}{A} \left(-1 - \frac{e - \frac{M}{P}}{\frac{W_1}{A}} \right) = \frac{P}{A} \left(-1 - \frac{a y_1}{i^2} \right)$$

donde se ha introducido

$$a = e - \frac{M}{P} \tag{1}$$

La distancia a es la coordenada del *centro de presión* C , que es el lugar de paso de la resultante, una vez compuesta la fuerza P con el momento M (figura 18).

4.3 Núcleo límite y núcleo de pasaje

Las condiciones a cumplir por las tensiones, a lo largo de las distintas etapas de la vida de la estructura pretensada, son que:

- las tensiones de compresión no superen en valor absoluto a las tensiones admisibles de compresión $\bar{\sigma}'_b$
- las tensiones de tracción no superen las tensiones admisibles $\bar{\sigma}_b$ ($\bar{\sigma}_b = 0$ en caso de pretensado total).

Estas condiciones están ilustradas en la figura 19.

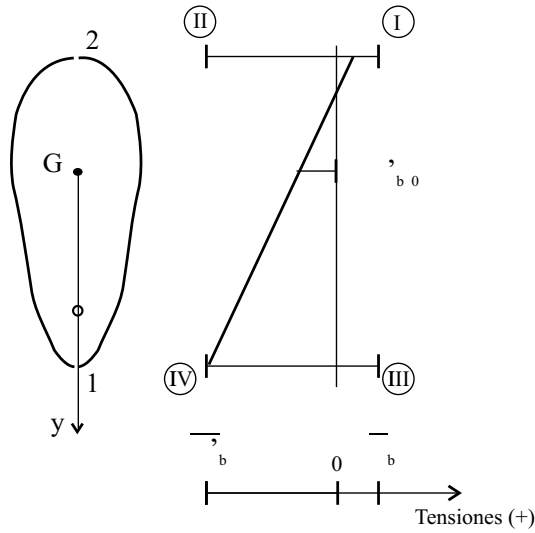


Figura 19: Límites para las tensiones de servicio

La condición señalada con (I) en la figura 19 corresponde a la tracción en las fibras superiores (punto 2), y teniendo en cuenta la expresión escrita para esas tensiones resulta:

$$\sigma_2^{(P+g+\psi p)} \leq \bar{\sigma}_b$$

$$\frac{P}{A} \left(-1 + \frac{a y_2}{i^2} \right) \leq \bar{\sigma}_b \quad (2)$$

Llamando $\sigma'_{b0} = \frac{-P}{A}$, a la tensión media de compresión, de la expresión de arriba puede despejarse a :

$$a \leq \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_b}{\sigma'_{b0}} \right) \frac{i^2}{y_2} = \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_b}{\sigma'_{b0}} \right) e_1 \quad (3)$$

Del mismo modo, la condición (II) de la figura 19, correspondiente a la compresión en las fibras superiores (punto 2), puede escribirse:

$$\sigma_2^{(P+g+\psi p)} \geq \bar{\sigma}'_b$$

$$\frac{P}{A} \left(-1 + \frac{a y_2}{i^2} \right) \geq \bar{\sigma}'_b \quad (4)$$

$$a \geq \left(1 - \frac{\bar{\sigma}'_b}{\sigma'_{b0}}\right)e_1 \quad (5)$$

Tal como se realizó para el punto 2, se puede escribir los límites para las tensiones en el punto 1. La condición (III), sobre las tensiones de tracción en la fibra inferior, conducen a:

$$\sigma_1^{(P+g+\psi p)} \leq \bar{\sigma}_b$$

$$\frac{P}{A} \left(-1 - \frac{a y_2}{i^2}\right) \leq \bar{\sigma}_b \quad (6)$$

$$a \geq \left(-1 + \frac{\bar{\sigma}_b}{\sigma'_{b0}}\right)e_2 \quad (7)$$

Y la condición (IV)(compresión en las fibras inferiores):

$$\sigma_1^{(P+g+\psi p)} \geq \bar{\sigma}'_b$$

$$\frac{P}{A} \left(-1 - \frac{a y_2}{i^2}\right) \leq \bar{\sigma}'_b \quad (8)$$

$$a \leq \left(-1 + \frac{\bar{\sigma}'_b}{\sigma'_{b0}}\right)e_2 \quad (9)$$

Las condiciones (3), (5), (7) y (9), sobre la ubicación a del centro de presión pueden resumirse en:

$$-c_2 \leq a \leq c_1 \quad (10)$$

donde se ha definido:

$$c_2 = \min \left(\left(1 - \frac{\bar{\sigma}'_b}{\sigma'_{b0}}\right)e_1, \left(-1 + \frac{\bar{\sigma}_b}{\sigma'_{b0}}\right)e_2 \right)$$

$$c_1 = \min \left(\left(1 - \frac{\bar{\sigma}_b}{\sigma'_{b0}}\right)e_1, \left(-1 + \frac{\bar{\sigma}'_b}{\sigma'_{b0}}\right)e_2 \right)$$

La expresión (10) define el *núcleo límite*. Para que las tensiones estén en todo momento dentro de los valores admisibles, el *centro de presión* debe estar dentro del *núcleo límite*, bajo cualquier estado de cargas.

El centro de presión, definido para una sección transversal, si se traslada a lo largo de la viga define lo que se denomina *línea de presión*. Análogamente, el *núcleo límite* definido para la sección se transforma en un *huso límite* para toda la viga.

El lugar geométrico de los puntos por los que debe pasar el cable en la sección transversal, para que el centro de presión permanezca dentro del núcleo límite se denomina *núcleo de pasaje*. Y su extensión a todo lo largo de la viga configura el *huso de pasaje*.

4.4 Determinación de e y P_0

Puede elegirse alguno de los dos valores y determinar el otro de manera de cumplir las condiciones sobre las tensiones.

Por ejemplo puede elegirse la excentricidad de manera que $a = e_1$, es decir, que la tensión de tracción en el punto superior sea nula, bajo la acción del pretensado y las cargas permanentes (P+g). De eso resulta:

$$e = e_1 + \frac{M^{(g)}}{P_0}$$

De la definición de centro de presión y núcleo límite se puede escribir (figura 20):

$$e \geq \frac{M_{max}}{P} - c_2$$

$$e \leq \frac{M_{min}}{P} + c_1$$

con lo que

$$\frac{M_{max}}{P} - c_2 \leq e \leq \frac{M_{min}}{P} + c_1$$

y

$$\frac{M_{max}}{P} - \frac{M_{min}}{P} \leq c_1 + c_2$$

de donde:

$$P \geq \frac{M_{max} + M_{min}}{c_1 + c_2} = \frac{\Delta M}{c_1 + c_2}$$

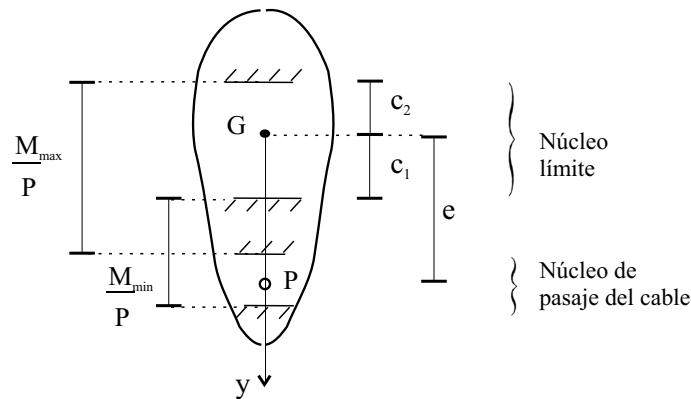


Figura 20: Núcleo de pasaje del cable

Una mejor comprensión acerca de la determinación de los valores de e y P puede tenerse si se reescriben las fórmulas (2), (4), (6) y (8) de la siguiente manera.

La condición (I) (fórmula (2) sobre las tensiones de tracción en las fibras superiores puede escribirse:

$$\sigma_2^{(P+g+\psi p)} \leq \bar{\sigma}_b$$

$$-\frac{P}{A} + \frac{P a y_2}{A i^2} \leq \bar{\sigma}_b$$

teniendo en cuenta (1):

$$-\frac{P}{A} + \frac{P e y_2}{A i^2} - \frac{M y_2}{A i^2} \leq \bar{\sigma}_b$$

operando sobre esta

$$P\left(\frac{e}{W_2} - \frac{1}{A}\right) - \frac{M}{W_2} \leq \bar{\sigma}_b$$

$$P\left(e - \frac{W_2}{A}\right) - M \leq W_2 \bar{\sigma}_b$$

$$P(e - e_1) - M \leq W_2 \bar{\sigma}_b$$

a la que finalmente se puede dar la forma:

$$\frac{1}{P} \geq \frac{e - e_1}{W_2 \bar{\sigma}_b + M} \quad (11)$$

Análogamente, a partir de la fórmula (4) se puede llegar a escribir, para la condición (II):

$$\frac{1}{P} \leq \frac{e - e_1}{W_2 \bar{\sigma}'_b + M} \quad (12)$$

A partir de la fórmula (6) se escribe, para la condición (III):

$$\frac{1}{P} \geq \frac{-e - e_2}{W_1 \bar{\sigma}_b - M} \quad (13)$$

Y partiendo de la fórmula (8), para la condición (IV):

$$\frac{1}{P} \leq \frac{-e - e_2}{W_1 \bar{\sigma}'_b - M} \quad (14)$$

Ahora bien, analizando la expresión (11), sobre las tensiones de tracción en las fibras superiores, se puede ver que las mismas tendrán valor máximo cuando la fuerza de pretensado tenga su valor máximo y cuando el momento externo positivo tenga su valor mínimo. El máximo valor de la fuerza de pretensado se produce luego del tesado y vale P_0 . El mínimo momento M_{min} corresponde a las cargas permanentes, sin sobrecarga. La expresión (11) puede entonces escribirse:

$$\frac{1}{P_0} \geq \frac{e - e_1}{W_2 \bar{\sigma}_b + M_{min}} \quad (15)$$

La condición (II), tensiones de compresión en las fibras superiores, será crítica para la combinación de mínima fuerza de pretensado y máximo momento. La fuerza mínima es P_∞ una vez producida las pérdidas de pretensado, y el momento máximo M_{max} corresponde a la acción de cargas permanentes y el total de la sobrecarga. La expresión (12) queda:

$$\frac{1}{P_\infty} \leq \frac{e - e_1}{W_2 \bar{\sigma}'_b + M_{max}} \quad (16)$$

La condición (III), tensiones de tracción en las fibras inferiores, será crítica para la combinación de mínima fuerza de pretensado y máximo momento, por lo que la expresión (13) se escribe:

$$\frac{1}{P_\infty} \geq \frac{-e - e_2}{W_1 \bar{\sigma}_b - M_{max}} \quad (17)$$

Finalmente la condición (IV), tensiones de compresión en las fibras inferiores, será crítica para la combinación de máxima fuerza de pretensado y mínimo momento, por lo que la expresión (14) se puede escribir:

$$\frac{1}{P_0} \leq \frac{-e - e_2}{W_1 \bar{\sigma}'_b - M_{min}} \quad (18)$$

Si se escribe la fuerza P_∞ y el momento máximo M_{max} en función de P_0 y M_{min} , respectivamente:

$$P_\infty = \eta P_0$$

$$M_{max} = M_{min} + \Delta M$$

las cuatro condiciones (15) a (18) quedan finalmente en la forma:

$$\frac{1}{P_0} \geq \frac{e - e_1}{W_2 \bar{\sigma}_b + M_{min}} \quad (19)$$

$$\frac{1}{P_0} \leq \eta \frac{e - e_1}{W_2 \bar{\sigma}'_b + M_{min} + \Delta M} \quad (20)$$

$$\frac{1}{P_0} \geq \eta \frac{-e - e_2}{W_1 \bar{\sigma}_b - M_{min} - \Delta M} \quad (21)$$

$$\frac{1}{P_0} \leq \frac{-e - e_2}{W_1 \bar{\sigma}'_b - M_{min}} \quad (22)$$

En estas las incógnitas son e y P_0 . Con el signo de igualdad las cuatro expresiones definen cuatro rectas en un plano $e - \frac{1}{P_0}$ (figura 21). Las desigualdades definen semiplanos a partir de cada recta que contiene pares de valores admisibles de e y $\frac{1}{P_0}$.

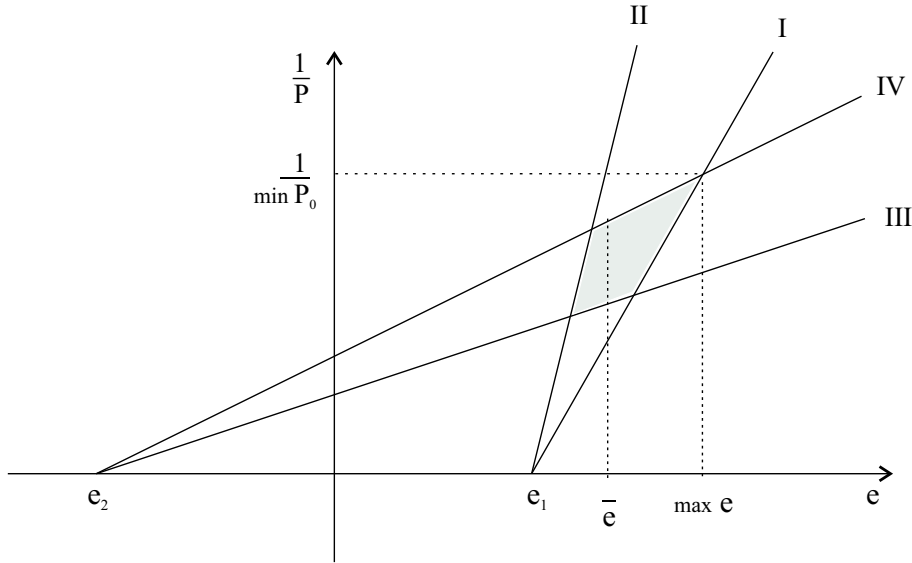


Figura 21: Diagrama de Magnel

A partir de (19) puede trazarse la recta (I) del gráfico, para la cual los valores de $\frac{1}{P_0}$ admisibles se ubican por encima de esa recta. Partiendo de (20) puede trazarse la recta (II) del gráfico, y los valores de $\frac{1}{P_0}$ admisibles se ubican por debajo de ella. En forma análoga trazando las

rectas (III) y (IV) queda definida la zona sombreada de la figura que representa el lugar de las combinaciones de e y P_0 que cumplen con las cuatro condiciones sobre tensiones. Si los puntos se ubican sobre alguna de las rectas significa que para esa condición se tiene la igualdad con las tensiones admisibles. El diagrama de la figura 21 se conoce como diagrama de Magnel.

Por ejemplo, la mínima fuerza de pretensado corresponde a la intersección de las rectas (I) y (IV), y requiere la máxima excentricidad. Por otra parte, si se conocen los valores posibles de excentricidad (por ejemplo la excentricidad \bar{e} en la figura), puede determinarse del diagrama el rango de valores posibles de P_0 .

5 Verificaciones necesarias para estructuras de hormigón pretensado

1. Capacidad de servicio:

Las tensiones bajo cargas de servicio se calculan en estado I. En la zona "traccionada" (la parte inferior en una viga simple con cargas gravitacionales, por ejemplo) no deben excederse las tensiones admisibles de *compresión*, para la combinación de momento mínimo (M_{min}) y carga de pretensado máxima (P_0). En la zona "comprimada" (la parte superior en una viga simple con cargas gravitacionales, por ejemplo) no deben excederse las tensiones admisibles de *tracción*, para la combinación de momento mínimo (M_{min}) y carga de pretensado máxima (P_0).

Si se trata de pretensado parcial o limitado, hay que verificar la abertura de las fisuras.

2. Capacidad portante:

La capacidad límite debe verificarse para P_∞ y las cargas se incrementan con los mismos coeficientes de seguridad que en hormigón armado: 1,75 para flexión y 2,10 para compresión o corte.

3. Pérdidas de pretensado:

Se deben estimar las pérdidas debido a fricción cable-vaina, así como las diferidas en el tiempo debido a retracción y fluencia lenta del hormigón y relajación del acero.

4. Fuerzas de desvío:

Debe examinarse las tensiones producidas en el hormigón en los lugares de desvío del cable, y prever el armado del hormigón a fin de evitar tensiones de tracción por este efecto.

5. Zonas de anclaje:

En la zona de los anclajes, tanto activo como pasivo, se produce estados importantes de tensiones tridimensionales en el hormigón que deben ser verificadas.

6. Acortamiento de estructuras pretensadas:

Se debe evaluar el acortamiento debido al pretensado, tanto en el momento inicial como para un tiempo muy largo ($t = \infty$), y debe determinarse su influencia sobre los apoyos, juntas de dilatación, etc.

7. Contraflechas por flexión:

Si las deformaciones producidas por el tensado pueden afectar al uso de la estructura debe preverse una contraflecha al momento de construirse la estructura. Como las deformaciones varían en el tiempo se toma un promedio de las deformaciones para tiempos $t = 0$ y $t = \infty$.