TEMA 5

Integración

Objetivos: Los objetivos son: (1) saber calcular integrales definidas en una variable; (2) saber calcular integrales definidas en dos variable mediante el teorema de Fubini y el teorema de cambio de variable; (3) utilizar integración para resolver problemas geométricos y físicos.

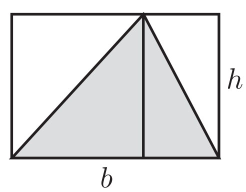
Prerrequisitos: Haber cubierto los objetivos de los temas anteriores.

Contenido:

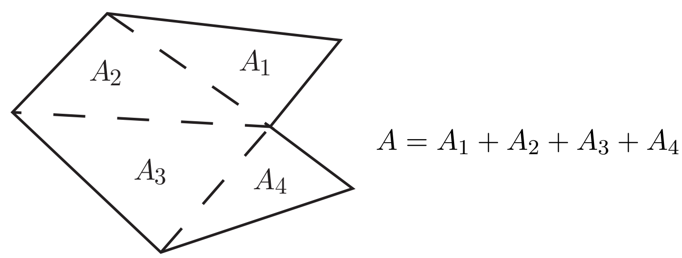
- Lección 5.1 Integrales de funciones de una variable. Integral de Riemman. Teorema fundamental del cálculo y regla de Barrow. Integración por partes y cambio de variable en las integrales definidas. Aplicaciones geométricas.
- Lección 5.2 Integración de campos escalares. Integral de Rieman para campos escalares. Teorema de Fubini. Campos vectoriales y teorema de cambio de variable. Aplicaciones.

LECCIÓN 5.1
Integrales de funciones de una variable

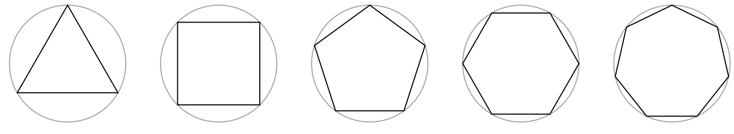
El contenido de esta lección está dedicado a la *integral de Riemman* o *integral definida* de funciones de una variable. Aunque utilizaremos el cálculo de áreas para introducir los conceptos, las aplicaciones de la integral definida son múltiples, tanto en las matemáticas como en las distintas áreas de ingeniería.



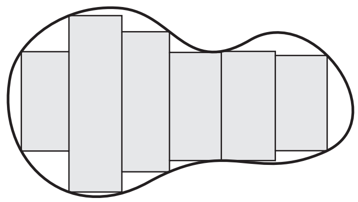
Seguramente el alumno recuerde toda una colección de fórmulas para calcular el área de polígonos. Todas esas fórmulas tienen como punto de partida la definición del área de un rectángulo: *el área de un rectángulo es el producto de sus dimensiones.* A partir de esta definición, podemos calcular el área de cualquier polígono. Por ejemplo, en la figura al lado podemos ver que el área de un triángulo de base b y altura h es $A = \frac{1}{2}bh$; además, el área de cualquier otra *región poligonal* se puede calcular dividiéndola en triángulo.



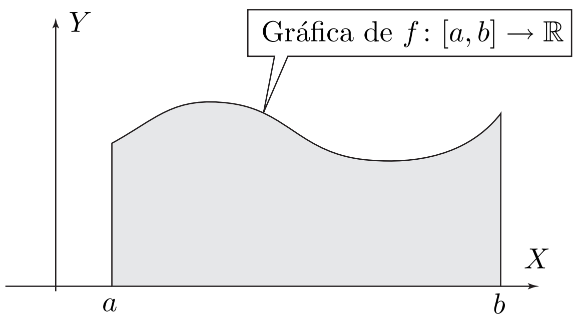
Pero, ¿cómo calculamos el área encerrada por una curva? No podemos obtener de forma directa una expresión para ese área, por lo que, en estos casos, buscamos un procedimiento para aproximar su valor. Por ejemplo, en la antigüedad, utilizaban polígonos regulares inscritos en un círculo para aproximar el valor de su área; cuantos más lados tomemos, mejor será esta aproximación.



En una región arbitraria, también podemos utilizar este procedimiento, por ejemplo, inscribiendo franjas rectangulares podemos mejorar la aproximación haciéndolas cada vez más estrechas.

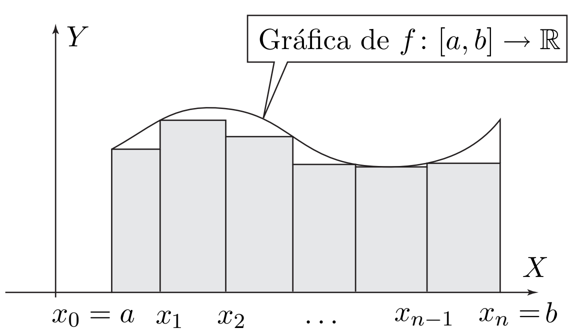


Este es el punto de partida para definir la integral definida de una función de una variable. Para poder hacer los cálculos de las áreas necesitamos conocer las dimensiones de los rectángulos inscritos y por eso el área que resulta más fácil de calcular es la región que queda entre el grafo de la función de una variable y el eje OX entre dos puntos de abcisas $x = a$ y $x = b$.



Aunque tiene sentido estudiar la integrabilidad de cualquier función acotada, a lo largo del tema vamos a trabajar solamente con funciones continuas *a trozos*. Veremos que todas las funciones continuas son integrables, aunque hay funciones integrables que no son continuas; el estudio de dichas funciones queda fuera de los objetivos del curso.

Volviendo al ejemplo de la figura de arriba, podemos plantear en primer lugar aproximar el área de la región tomando franjas rectangulares que queden estrictamente dentro de la región, es decir, obtener una *aproximación por defecto*.



Para ello, elegimos un conjunto de puntos del intervalo $[a, b]$, que llamamos *partición*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Las bases de los rectángulos serán las diferencias $(x_i - x_{i-1})$ y las alturas serán los valores mínimos que tome la función en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$,

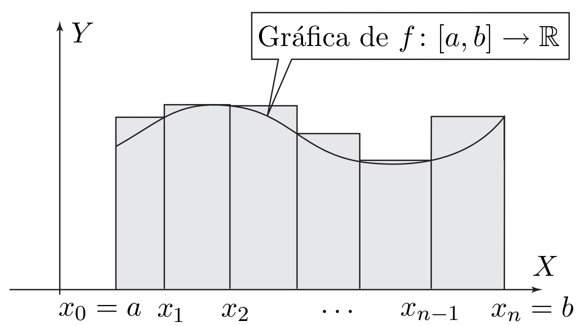
$$m_i = \text{mín}\{f(t); t \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Recordemos que estos valores existen porque estamos suponiendo que la función f es continua. De esta forma, ya podemos calcular la aproximación por defecto del área,

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

y que llamamos *suma inferior* de f para la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

También podemos hallar una *aproximación por exceso* del área.



Para ello, tomamos la misma partición y en lugar de los valores mínimos de cada subintervalo, tomamos los valores máximos como alturas de las franjas rectangulares:

$$M_i = \text{mín}\{f(t); t \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$U_P = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

Esta aproximación U_P se denomina *suma superior* de f para la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Es evidente que, para cada partición, el área exacta siempre estará entre cada suma inferior y cada suma superior,

$$L_P \leq A \leq U_P.$$

Además, las aproximaciones mejoran a medida que añadimos puntos a la partición y reducimos la distancia entre ellos. En el *límite*, las aproximaciones por defecto y por exceso se encontrarían para darnos el valor del área.

Definición 5.1 *Una función f acotada sobre $[a, b]$ se dice* integrable *en $[a, b]$ si:*

$$\sup\{L_P : P \text{ Partición de } [a, b]\} = \inf\{U_P : P \text{ Partición de } [a, b]\}$$

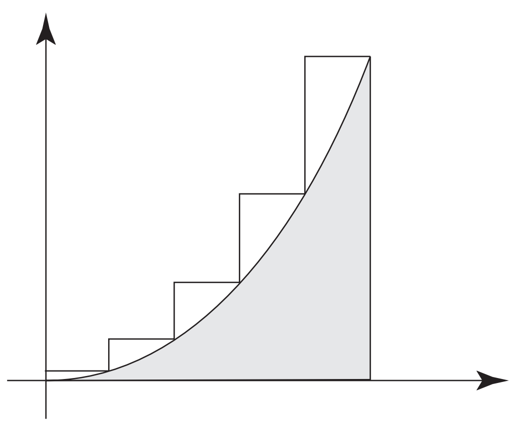
En tal caso, este número recibe el nombre de integral *de f sobre $[a, b]$ y se denota por $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)dx$ (el símbolo dx se usa para indicar la variable de la función).*

Como ya habíamos anunciando, las funciones continuas son integrables en cada intervalo cerrado.

Teorema 5.2 *Toda función continua en un intervalo cerrado I, es integrable en ese intervalo.*

En la definición 5.1 hemos utilizado los operadores sup e ínf que devuelven el límite o extremo superior y el límite o extremo inferior de un conjunto de números. En general, no es fácil calcular estos valores, aunque en algunos casos es posible hacerlo utilizando técnicas de cálculo de límites si sabemos que la función es integrable.

Ejemplo 5.1.1 Vamos a calcular el área que queda entre la parábola $y = x^2$ y el eje OX en el intervalo $[0, 1]$.



En lugar de trabajar con todas las particiones posibles, es suficiente considerar las particiones $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\}$, que se denominan *particiones regulares en n subintervalos*. La razón es que la amplitud de estos subintervalos, $1/n$, decrece a 0 y que la función es integrable, por ser continua. Además, esta familia es en realidad una sucesión y por lo tanto, la sumas superiores o inferiores asociadas son sucesiones numéricas; por lo tanto, determinar el ínfimo y el supremo se reduce a calcular límites:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 dx &= \operatorname{ínf}\{U_P : P \text{ Partición de } [0,1]\}\\ &= \operatorname{lím} U_{P_n} = \operatorname{lím}\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})\\ &= \operatorname{lím}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \operatorname{lím}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\ &= \operatorname{lím}\frac{1}{n^3}(1+2^2+3^2+\cdots+n^2)\\ &= \operatorname{lím}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Otra forma de simplificar el cálculo es usando *sumas de Riemman*. Dada una partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de un intervalo $[a, b]$, y un conjunto de puntos $\xi = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ tal que $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada i, llamamos suma de Riemman de f para P y ξ a:

$$R_P^{\xi} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}),$$

Si la función f es continua, las sumas de Riemman también convergen a la integral. Como veremos más adelante, las sumas de Riemman serán una herramienta más flexible para justificar que una determinada magnitud puede ser calculada usando una integral. Debemos recordar que las integrales no sirven únicamente para calcular áreas, aunque este ha sido el modelo que hemos utilizado para presentar el concepto.

TEOREMA 5.3 *Si f es una función continua y positiva en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f$ es el valor del área de la región comprendida entre el grafo de f y el eje OX en dicho intervalo.*

EJEMPLO 5.1.2 El área de un círculo se puede calcular a partir de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Si consideremos el intervalo $[0, r]$, la región entre el grafo de f y el eje OX es un cuarto de círculo y por lo tanto:

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = \left[2r^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{r} + 2x\sqrt{r^2 - x^2}\right]_0^r = \pi r^2$$

No incluimos los detalles del cálculo de la primitiva puesto que ya ha sido resuelta en el tema anterior.

5.1.1. Teoremas y propiedades fundamentales

Aunque hemos podido calcular una integral definida usando límites de sucesiones, este procedimiento dista mucho de ser eficaz. Las sumas de Riemman serán la herramienta teórica fundamental para la aplicación de la integral a determinados modelos matemáticos o físicos, pero no son una herramienta de cálculo. El resultado fundamental para abordar este objetivo es el *Teorema fundamental del cálculo*, que relaciona los dos conceptos básicos del *Cálculo infinitesimal*, la derivación y la integración.

TEOREMA 5.4 *(Teorema Fundamental del Cálculo) Sea f una función continua en $[a, b]$, y consideremos la función F definida como:*

$$F(t) = \int_a^t f$$

Entonces, F es derivable y $F' = f$

En el tema anterior hemos definido y trabajado con el concepto de *primitiva* de una función, pero no hemos podido saber hasta ahora para qué funciones existe primitiva. El teorema fundamental del cálculo resuelve este problema: toda función continua en un intervalo cerrado admite una primitiva en ese intervalo (aunque no esté expresada en términos de funciones elementales). Como corolario de este teorema obtenemos la *Regla de Barrow.*

TEOREMA 5.5 *(Regla de Barrow) Si f es continua en $[a, b]$ y $f = F'$, entonces*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \overset{\text{(Notación)}}{=} \Big[F(x)\Big]_a^b$$

EJEMPLO 5.1.3 Vamos a calcular de nuevo el área de la región del ejemplo 5.1.1 usando la regla de Barrow:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

El hecho de tener un resultado tan potente como la Regla de Barrow para calcular integrales definidas no debe llevarnos a la conclusión errónea de que podemos olvidar la definición de integral. Por otra parte, la regla de Barrow solo es útil para aquellas funciones que admiten una primitiva *expresable en términos de funciones elementales*, y ya sabemos que no todas las funciones continuas admiten este tipo de primitivas. En estos casos, podríamos recurrir a métodos de aproximación, entre los cuales se encuentra la evaluación de sumas de Riemman.

El siguiente resultado recoge las propiedades algebraicas y otras propiedades elementales de la integral definida.

Teorema 5.6 *Sean f y g dos funciones integrables en I y sea $[a, b] \subset I$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

1. $\displaystyle\int_a^b (f \pm g) = \left(\int_a^b f\right) \pm \left(\int_a^b g\right)$.

2. $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$ *para cualquier* $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\int_a^b f = \left(\int_a^c f\right) + \left(\int_c^b f\right)$ *para cualquier* $c \in I$.

4. $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$

Como herramientas para el cálculo de primitivas, hemos estudiado en el tema anterior el método de integración por partes y los métodos de sustitución. Volvemos a recoger a continuación estos resultados pero aplicados a la integral definida.

Teorema 5.7 *(Cambio de variable directo) Sean g continua en $[a, b]$ y tal que g' existe y es continua y sea f continua entre $g(a)$ y $g(b)$, entonces:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

La ventaja de usar este resultado y los siguientes está en qué, para calcular una integral definida, no necesitaremos completar el proceso de cálculo de la primitiva deshaciendo los cambios de variable que apliquemos. Bastará con modificar los límites de integración usando la función que da el cambio de variable.

En el segundo resultado de cambio de variable debemos tener en cuenta que la función del cambio debe ser biyectiva.

Corolario 5.8 *(Cambio de variable inverso) Sea f una función continua en $[\alpha, \beta]$. Consideremos una función $g\colon I \to [\alpha, \beta]$ biyectiva, continua y con primera derivada continua. Entonces,*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(u))g'(u)du$$

Ejemplo 5.1.4 En el ejemplo 5.1.2 hemos calculado el área de un círculo de radio r utilizando una primitiva que se calculó en el tema anterior. Vamos a repetir el mismo cálculo pero realizando el cambio de variable en la integral definida.

$$\begin{aligned}
A =&4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx\\
&\left[\begin{array}{l} x = r\operatorname{sen}\theta \text{ (esta función es biyectiva en } [0,\pi/2])\\ dx = r\cos\theta d\theta \\ x=0\to\theta=0\\ x=r\to\theta=\pi/2\end{array}\right.\\
=&4\int_0^{\pi/2} r^2\cos^2\theta d\theta = 4r^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\\
=&4r^2\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4r^2\frac{\pi}{4} = \pi r^2
\end{aligned}$$

Podemos observar que al evitar deshacer los cambios, las expresiones que manejamos son más simples.

La técnica de integración por partes también tiene su enunciado correspondiente con integrales definidas.

Teorema 5.9 *(Integración por partes) Sean f y g dos funciones tales que f' y g' son continuas, entonces:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

Aparentemente, este resultado no conlleva ninguna ventaja de forma aislada, pero es útil para usarlo conjuntamente con los cambios de variable.

Ejemplo 5.1.5 Utilizamos el resultado anterior para calcular la siguiente integral definida

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos x\ln\operatorname{sen}x\,dx$$

Para ello, utilizamos el cambio de variable

$$t=\operatorname{sen}x,\quad dt=\cos x\,dx$$

Los límite de integración se modifican de la siguiente forma: para $x=\pi/6$, el valor de t es $1/2$, mientras que para $x=\pi/2$ el valor de t es 1.

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos x\ln\operatorname{sen}x\,dx = \int_{1/2}^1\ln t\,dt\\
&\qquad\left[\begin{array}{l} u=\ln t\to du=\dfrac{dt}{t}\\ dv=dt\to v=t\end{array}\right.\\
&\qquad=\Big[t\ln t\Big]_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 dt = -\frac{\ln(1/2)}{2} - \Big[t\Big]_{1/2}^1 = \frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

5.1.2. Aplicaciones geométricas

En esta sección vamos a ver algunas aplicaciones geométricas de la integral definida: volúmenes de revolución y longitud de curva. En la relación de ejercicios se presentarán algunas más.

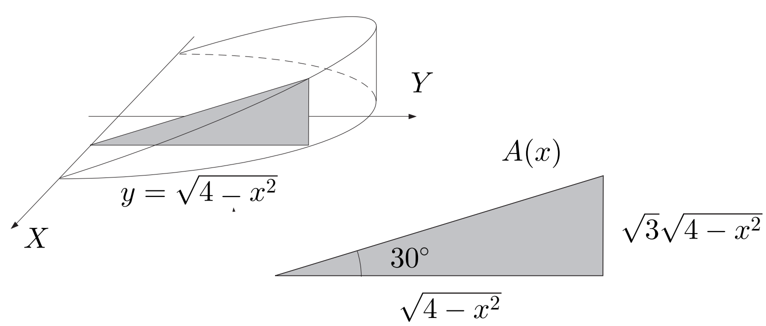
Volúmenes: método de secciones

Supongamos que tenemos el sólido acotado por dos planos perpendiculares al eje OX, $X = a$, $X = b$. Supongamos que para cada $x \in [a, b]$ conocemos el área, $A(x)$, de la sección del sólido por el plano $X = x$ y que la función A así definida es continua en $[a, b]$. Entonces, el volumen del sólido viene dado por:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

En algunos casos, el enunciado del problema dará la posición del sólido respecto de los ejes coordenados, pero más frecuentemente, tendremos que elegir nosotros esta posición, de tal forma que sea fácil calcular las áreas $A(x)$.

Ejemplo 5.1.6 Se corta una cuña de un tronco (cilíndrico) de radio 2 dm dando dos cortes con una sierra mecánica que llegan hasta el centro del tronco. Si uno de los cortes se hace perpendicular y el otro formando un ángulo de 30° con el primero, ¿qué volumen tendrá la cuña?



Para hacer el cálculo utilizando el método de las secciones, situamos el sólido como se muestra en la figura. La base de la cuña, perpendicular al eje del tronco, es el interior del semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$. Al hacer los cortes perpendiculares al eje OX, las secciones son triángulos rectángulos cuya base es $\sqrt{4 - x^2}$ y forma un ángulo de 30° con la hipotenusa. Por lo tanto, su altura es $\sqrt{3}(4 - x^2)$ y el área de la sección es $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - x^2)$. El volumen que queríamos calcular es:

$$V = \int_{-2}^{2} A = \int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - x^2)dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}\sqrt{3}$$

Como caso particular, podemos calcular el volumen de *sólidos de revolución* usando el método de los discos. Si consideremos una región plana determinada por el grafo de una función continua f entre a y b que gira alrededor del eje OX, el sólido generado verifica que las secciónes perpendiculares al eje OX, son circulos de radio $f(x)$. Por tanto, el volumen del sólido es:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx$$

Volúmenes de revolución: método por capas

Otra forma de generar un sólido de revolución es girando la región determinada por una función continua en un intervalo $[a, b]$ con $a \geq 0$, alrededor del eje OY. El volumen de un sólido así generado es:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) \, dx$$

Longitud de una curva parametrizada

Sea $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada diferenciable y con derivada continua. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, la longitud de la curva γ es:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt$$

La expresión del integrando se denomina *diferencial de longitud*

$$d\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt$$

y expresa cómo varía la longitud de la curva respecto de la variación del parámetro.

Como caso particular, la longitud de la gráfica de una función derivable f, en un intervalo $[a, b]$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

5.1.3. Integrales impropias

En general, decimos que una integral definida es impropia si la función del integrando no está definida en algún punto del dominio de integración o este no está acotado. Para abordar este tipo de integrales tenemos que fijarnos en primer lugar en los casos más simples, es decir, aquellos en los que la función no está definida exactamente en un punto.

Definición 5.10 *Sea f una función continua en $[a,+\infty)$. La integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ se define como*

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f$$

Decimos que la integral converge *si este límite existe y es un número real. De forma análoga se define $\int_{-\infty}^a f$*

Definición 5.11 *Sea f una función continua en $[a,b)$ y no definida en b. La integral impropia $\int_a^b f$ se define por*

$$\int_a^b f = \lim_{t\to b} \int_a^t f$$

Decimos que la integral converge *si este límite existe y es un número real. De forma análoga se define $\int_a^b f$ si f es continua en $(a,b]$ y no definida en a.*

La regla de Barrow se extiende fácilmente a la evaluación de integrales impropias. Por ejemplo, si F es una primitiva de f en el intervalo $[a,+\infty)$, entonces:

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{t\to+\infty} (F(t)-F(a)) \underset{\text{(Notación)}}{=} \Big[F(t)\Big]_a^{+\infty}$$

Ejemplo 5.1.1
Vamos a calcular dos integrales impropias de la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} (-\frac{1}{x}+1) = 1$$
$$\int_0^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^{1} = \lim_{x\to 0^+} (-1+\frac{1}{x}) = +\infty$$

Teorema 5.12 *Si f es una función continua y no negativa, entonces cada uno de los tipos básicos de integrales impropias o bien convergen a un número real c o bien divergen a ∞.*

Las definiciones anteriores solo recogen los casos en que la integral es impropia en uno de los límites de integración, pero también podemos considerar *integrales impropias en los dos límites de integración o en un punto interior*. En estos casos, solo podemos dar la definición de *convergencia*; por ejemplo, si f es continua en $(a,+\infty)$ y no esta definida en a, decimos que la integral impropia $\int_a^{\infty} f$ converge si convergen la integrales $\int_a^b f$ y $\int_b^{\infty} f$ para algún $b>a$; análogamente se define la convergencia del resto de integrales impropias.

Ejercicios de clase

1. Consideramos la región del primer cuadrante encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = 1 - x$ y los ejes de coordenadas. Se pide:

   a) Calcular valores aproximados del área de la región:

   1) Utilizando la suma superior en una partición del intervalo formada por 2 puntos.
   2) Utilizando la suma superior en una partición del intervalo formada por 3 puntos.
   3) Utilizando la suma superior en una partición del intervalo formada por 5 puntos.
   4) Repita los apartados anteriores utilizando sumas inferiores.

   b) Calcule el valor exacto del área de dos maneras distintas:

   1) Tomando límite sobre la suma de Riemman para una elección cualquiera sobre la partición $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ y sabiendo que la suma de los n primeros números naturales es

   $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   2) Utilizando la regla de Barrow.

   c) Compare los resultados aproximados obtenidos en el primer apartado con el valor exacto obtenido en el segundo apartado y compruebe que se verifica la desigualdad: $L_P \leq A \leq U_P$.

2. Determine la función $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(t)\,dt$ donde:

$$f(t) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3. Usar las propiedades de la integral definida y el teorema fundamental para hallar las siguientes derivadas:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^t dt, \qquad \frac{d}{dx}\int_1^{x^3} t^5 dt, \qquad \frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \operatorname{sen} t\,dt$$

4. Consideremos las siguientes funciones definidas en el intervalo $[0, 10]$:

$$f(x) = x^2 - 3x, \qquad g(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x - 4 & \text{si } 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

a) Calcule las integrales $\int_0^{10} f(x)\,dx$ e $\int_0^{10} g(x)\,dx$

b) Indique las propiedades de la integral definida que se van aplicando para calcular la integral

$$\int_0^{10} (2f(x) - 3g(x))\,dx$$

5. Aplique los teoremas del cambio de variable (directo e inverso) para calcular las siguientes integrales definidas:

$$(a) \quad \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$$

6. Utilice la integral definida para calcular el área de las siguientes regiones:

   a) La región determinada por la curva de ecuación $f(x) = \sqrt{2x+1}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

   b) La región limitada por la parábola de ecuación $y = -x^2 + 3x + 10$ y el eje de abscisas.

7. Fórmula general del área.

   a) Calcule la integral de la función $\operatorname{sen} x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

   b) Esboce la gráfica de la función del apartado anterior y utilice la integral definida para calcular calcule el área de la región comprendida entre esta gráfica y el eje de abscisas.

   c) Deduzca que, si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces el área que queda entre la gráfica de la función y el eje de abscisas vale:
   $$A = \int_a^b |f(x)|dx$$

8. Si f y g son dos funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ entonces el área que queda encerrada entre las gráficas de las dos funciones vale:

   $$A = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx$$

   a) Hacer un dibujo para interpretar y deducir los elementos que aparecen en la fórmula.

   b) Utilizar este resultado para calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 9x^2 + 10$ y $g(x) = x^2 + 1$.

9. Utilice el método de secciones para calcular el volumen de una pirámide cuadrangular cuya altura es h y el lado de la base vale d.

10. Consideremos la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$. Se pide:

    a) Calcular el volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje OX.

    b) Calcular el volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje OY.

11. Consideremos la región comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$. Se pide:

    a) Calcular el volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje $Y = -1$.

    b) Calcular el volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje $X = 2$.

12. Calcule el volumen de un tronco de cono de altura h y radios de las bases r y R:

    a) Utilizando el método de discos.

    b) Utilizando el método de capas.

13. Halle la distancia recorrida por un movil entre los instantes $t = 0$ y $t = 4$ si su posición viene determinada por las ecuaciones:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} \qquad , \qquad y(t) = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}$$

14. Un cable eléctrico soportado por dos postes distantes 200 metros adopta la forma de una catenaria (coseno hiperbólico) de ecuación $y = 150\cosh\dfrac{x}{150}$. Calcule la longitud del cable entre esos dos postes.

15. Halle la longitud de la circunferencia de ecuación polar $r = 2a \operatorname{sen}\theta$

16. De manera análoga a los volúmenes de revolución y utilizando los resultados obtenidos para el cálculo de la longitud de una curva, se pueden deducir fórmulas para calcular el área de una superficie de revolución.

    a) *Girando alrededor del eje OX*: Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva diferenciable $[a, b]$, entonces el área de la superficie generada al girar la curva respecto del eje OX es:

$$S = \int_a^b 2\pi|y(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

    En particular, si la curva es el grafo de una función f, la expresión anterior queda:

$$S = \int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Se pide:

1) Hacer un dibujo e interpretar los elementos que aparecen en las fórmulas.
2) Hallar la superficie determinada al girar alrededor del eje OX la curva de ecuación $x(t) = t$, $y(t) = t^2/2$ entre las constantes $t = 0$ y $t = 4$.
3) Calcular al área de la superficie engendrada al girar el arco de curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje OX.

b) *Girando alrededor del eje OY*: Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva diferenciable $[a, b]$ siendo $a \geq 0$, entonces el área de la superficie generada al girar la curva respecto del eje OY es:

$$S = \int_a^b 2\pi 2\pi x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Se pide:

1) Hacer un dibujo e interpretar los elementos que aparecen en la fórmula.
2) Hallar la superficie determinada al girar alrededor del eje OX la curva de ecuación $x(t) = t$, $y(t) = t^2/2$ entre las constantes $t = 0$ y $t = 4$.
3) Deducir la fórmula en el caso en el que la curva sea el grafo de una función f.
4) Calcular al área de la superficie engendrada al girar el arco de curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje OY.

17. Calcular el área lateral de un cono de altura h y radio de la base r.

18. Calcular la superficie de la esfera de radio R.

19. Integral de un campo escalar sobre una línea: Sea $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada diferenciable y con derivada continua. Supongamos que sobre cada punto de la curva tenemos aplicado un campo escalar $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La *integral del campo f sobre la curva* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ se define como:

$$\int_C f = \int_a^b f(\gamma(t))d\ell = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Se pide:

a) Hacer un dibujo e interpretar los distintos elementos de la fórmula.

b) Calcular la integral del campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la curva $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e interpretar geométricamente el resultado.

20. Integral de línea: Sea $\boldsymbol{F}\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo y sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regular tal que $C = \gamma([a,b]) \subset D$. Llamamos *integral de línea de $\boldsymbol{F}$ sobre la curva C* o *circulación de $\boldsymbol{F}$ a través de C* a la integral:

$$\int_C \boldsymbol{F} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b (F_1(\gamma(t))x'(t) + F_2(\gamma(t))y'(t))\, dt$$

La principal aplicación de esta integral es el cálculo del *trabajo total* que realiza un campo de fuerzas $\boldsymbol{F}$ al desplazarse por la curva C. Una forma alternativa de expresar el integrando es $F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$, que se denomina *forma diferencial*.

Calcule la integral de línea $\int_C xy^4\, dx + x^2y^3 dy$, donde C es una curva que une los puntos $O = (0,0)$ y $A = (1,1)$ con los siguientes recorridos:

a) Poligonal con segmentos paralelos a los ejes coordenados (las dos posibilidades).

b) Segmento OA.

c) Curva $y^3 = x$

21. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y, en su caso, calcular su valor:

$$(a) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (b) \quad \int_e^\infty \frac{dx}{x \log x} \quad (c) \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

22. Sea Ω la región bajo la curva $y = e^{-x}$, $x \geq 0$. Se pide:

a) Calcule el área de Ω.

b) Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al girar Ω alrededor del eje OX.

c) Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al girar Ω alrededor del eje OY.

d) Calcule las superficies de revolución de los sólidos obtenidos en los apartados anteriores.

23. ***p**-integrales.*

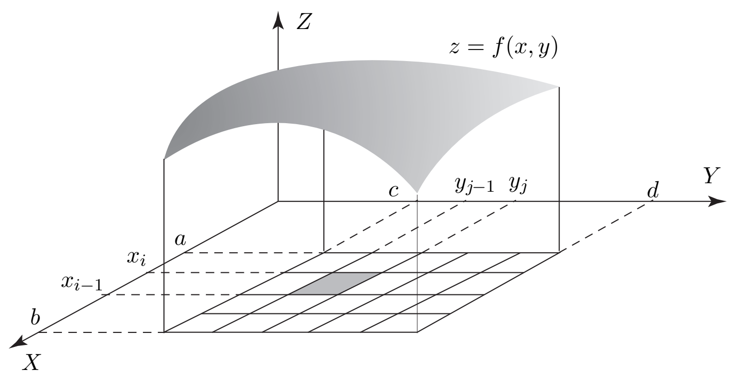
a) Determine los valores de p para que la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$, para $a > 0$, sea convergente y calcule su valor.

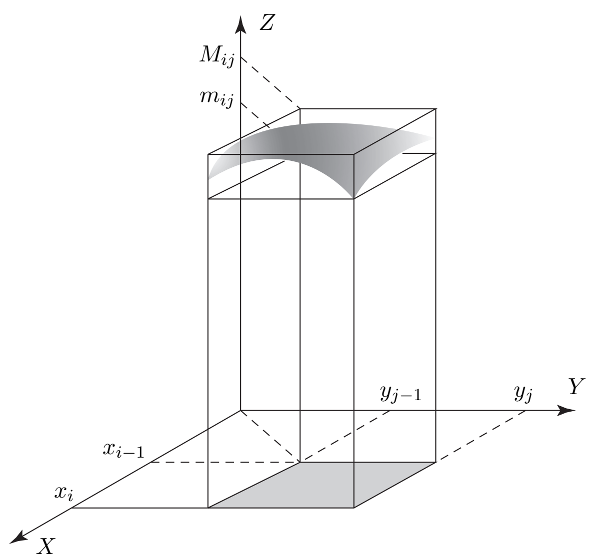
b) Determine los valores de p para que la integral impropia $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$, para $a > 0$, sea convergente y calcule su valor.

LECCIÓN 5.2

Integración múltiple

Consideremos un campo escalar $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es positiva y acotada en el *rectángulo* $R = [a, b] \times [c, d]$. De la misma forma que para las funciones de una variable utilizábamos rectángulos, ahora podemos intentar aproximar el volumen de la región que queda entre el grafo de f y el plano XY tomando prismas. La manera más simple de hacerlo es tomando particiones de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ y considerando como base de los prismas los rectángulos que forman:





Las aproximaciones por defecto y por exceso se calculan de forma similar a como hemos hecho en una variable. Basta tomar los valores menor y mayor que toma la función en cada rectángulo. Una *aproximación por defecto* del volumen será la *suma inferior* de f

$$L_P = \sum_{i,j} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Una *aproximación por exceso* del volumen será la *suma superior* de f:

$$U_P = \sum_{i,j} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Para mejorar estas aproximaciones basta tomar particiones *más finas* de los intervalos.

Definición 5.13 *Sea $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar acotado en el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Decimos que f es integrable en R si $\inf_P \{U_P\} = \sup_P \{L_P\}$. En tal caso, a este número lo llamamos* integral de f en R *y lo denotamos:*

$$\iint\limits_R f = \inf\{U_P\} = \sup\{L_P\}$$

Teorema 5.14 *Si un campo es continuo en en un rectángulo, también es integrable*

Para los campos integrables, es posible utilizar *sumas de Riemman* para calcular las integrales, es decir, podemos considerar cualquier punto de cada intervalo de la partición en lugar del máximo o el mínimo. También para campos integrables, podemos considerar sucesiones de particiones en lugar de todas las posibles sucesiones, siempre y cuando la distancia entre los puntos de la partición decrezca a 0.

Ejemplo 5.2.1 Consideremos el campo $f(x,y) = 2x + y$ definido en la región $[0,1] \times [0,1]$; este campo es integrable por ser continuo. Para cada m consideremos la partición, P_m, determinada por la siguiente partición del intervalo $[0,1]$: $\{0, 1/m, 2/m, \dots, m/m = 1\}$; y consideremos la elección de puntos, ξ_m, dada por el vértice superior derecho de cada rectángulo. La correspondiente sucesión de sumas de Riemman es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_m &= \sum_{1\le i,j\le m} \Big(2\frac{i}{m} + \frac{j}{m}\Big)\frac{1}{m^2} = \frac{1}{m^3}\sum_{1\le i,j\le m}(2i+j) \\
&= \frac{1}{m^3}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(2i+j) = \frac{1}{m^3}\sum_{j=1}^{m}\Big(mj + 2\sum_{i=1}^{m} i\Big) \\
&= \frac{1}{m^3}\sum_{j=1}^{m}\Big(mj + 2\frac{m(m+1)}{2}\Big) = \frac{1}{m^3}\Big(m^2(m+1) + m\sum_{j=1}^{m} j\Big) \\
&= \frac{1}{m^3}\Big(m^2(m+1) + m\frac{m(m+1)}{2}\Big) = \frac{3m^2(m+1)}{2m^3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\iint\limits_R (2x+y)dxdy = \lim_{m\to+\infty} \frac{3m^2(m+1)}{2m^3} = \frac{3}{2}$ ——

Además de las funciones continuas en rectángulos, hay otras funciones que también son integrables. En el caso de las integral múltiple, nos hace falta considerar un segundo caso que también utilizaremos.

TEOREMA 5.15 *Sea C un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea f un campo escalar continuo y acotado en C. Sea R un rectángulo tal que $C \subset R$ y consideremos el campo*

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \text{si } \boldsymbol{x} \in C \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{x} \in R \setminus C \end{cases}$$

Entonces, el campo $\bar{f}$ es integrable en R.

Además, esto nos permite extender la definición de integrabilidad a regiones más generales.

DEFINICIÓN 5.16 *Siguiendo las notaciones del teorema anterior, llamamos integral de f en C a:*

$$\iint\limits_C f = \iint\limits_R \bar{f}$$

Con el siguiente resultado establecemos que efectivamente la integral nos permite calcular el volumen de regiones de tres dimensiones.

TEOREMA 5.17 *Consideremos un campo escalar $f\colon C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es positivo y acotado en C. Entonces, la integral $\iint_C f$ es el valor del volumen del sólido comprendido entre el grafo de f en C y el plano XY.*

No vamos a abordar en este curso las integrales de campos de tres o más variables, aunque teóricamente su definición no supone ninguna dificultad. Como veremos a lo largo del tema, el calculo de las integrales múltiples se sustenta en el cálculo de primitivas y en el estudio y transformación de las regiones de integración y por lo tanto, el nivel de dificultad que aporta el aumento de las variables no está en el propio concepto de integral sino en la manipulación de regiones y objetos en el espacio. Por esta razón, en este curso trabajaremos solamente en regiones planas.

TEOREMA 5.18 *Sean f y g dos campos escalares integrables sobre $D \subset \mathbb{R}^2$ y $c, k \in \mathbb{R}$.*

1. *Linealidad:*

$$\iint\limits_D (cf + kg) = c\left(\iint\limits_D f\right) + k\left(\iint\limits_D g\right)$$

2. Aditividad: Si $D = D_1 \cup D_2$ y Área$(D_1 \cap D_2) = 0$,

$$\iint\limits_{D} f = \left(\iint\limits_{D_1} f \right) + \left(\iint\limits_{D_2} f \right)$$

5.2.1. Teorema de Fubini. Consecuencias

El teorema de Fubini, que enunciamos a continuación, demuestra que los conceptos de integral sobre cada dimensión son coherentes:

Teorema 5.19 (de Fubini) *Sea $f\colon C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo sobre el conjunto cerrado y acotado C con*

$$C \subset R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

Consideremos el campo:

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \textit{si } \boldsymbol{x} \in C \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

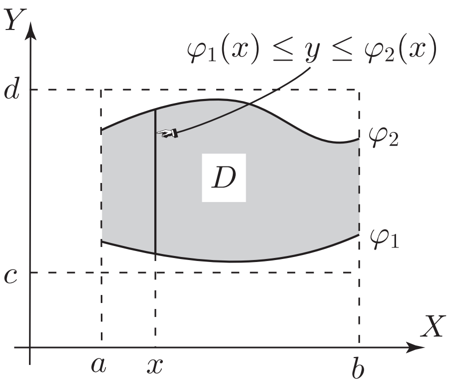
$$\int\limits_{C} f(x,y)dxdy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \bar{f}(x,y)dy \right) \dots dx$$

Ejemplo 5.2.2 Calculemos la integral $\iint_R (2x+y)dxdy$ con $R = [0,1] \times [0,1]$. En la sección anterior se calculó esta integral haciendo uso de sumas de Riemann.

$$\begin{aligned} \iint_R (2x+y)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (2x+y)dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[x^2 + yx \right]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^1 (1+y)dy = \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Supongamos que $D \subset \mathbb{R}^2$ está limitado por los grafos de las funciones $\varphi_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\varphi_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal y como se muestra en la figura, entonces

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$



Ejemplo 5.2.3 Vamos a calcular el volumen de la cuña descrita en el ejemplo 5.1.6 utilizando una integral doble. Concretamente, el sólido es la región que queda entre el grafo del campo $f(x,y) = y\sqrt{3}$ y el plano OX en el dominio D definido por $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$.

$$V = \iint_D \sqrt{3}y\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{3}y\,dy\right)dx$$
$$= \int_{-2}^{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}\sqrt{3}$$

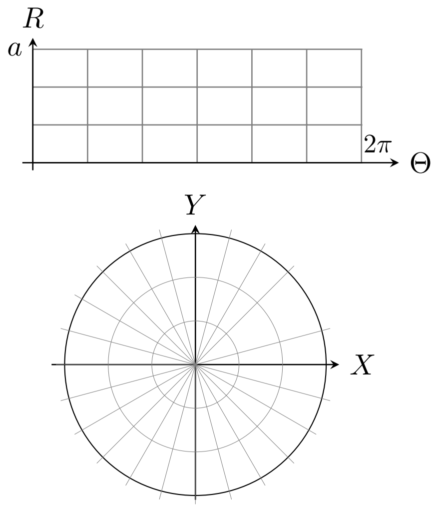
5.2.2. Teorema de cambio de variable

El teorema de Fubini es la herramienta fundamental para el cálculo de integrales múltiples, sin embargo, hemos podido observar que su aplicación no es sencilla si la región de integración no es rectangular. Los cambios de variable nos van a permiter utilizar descripciones más simples de una región. Por ejemplo, mientras que un círculo de radio a centrado en $(0,0)$ en coordenadas cartesians se describe por $-\sqrt{a^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}$, $-a \leq x \leq a$, en coordenadas porlares se describe simplemente por $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Para hacer esta descripción alternativa, hemos usado la aplicación

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

que convierte las *coordenadas polares* en *coordenadas cartesianas*. Esta aplicación tiene su origen e imagen en $\mathbb{R}^2$, es decir, es un *campo vectorial*. Para poder enunciar el teorema de cambio de variable necesitamos introducir algunos conceptos previos.



$$\begin{array}{c} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \Big\downarrow T \\ -a \leq x \leq a \\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \end{array}$$

Definición 5.20 *Un campo vectorial es una aplicación cuyo dominio está contenido en un espacio $\mathbb{R}^n$ y su imagen lo está en otro espacio $\mathbb{R}^m$; es decir, responde al esquema $\boldsymbol{f}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Un campo vectorial está determinado por m campos escalares: $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_m)$.*

En el teorema de cambio de variable, necesitaremos utilizar campos vectoriales continuos y diferenciables, es decir, sus componentes deben ser campos escalares continuos y diferenciables. Para los campos diferenciables, necesitaremos además calcular su *matriz jacobiana*.

Definición 5.21 *Si $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)$ es diferenciable en $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, llamamos* matriz jacobiana *de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ a la matriz:*

$$J\boldsymbol{f}(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\boldsymbol{a}) & D_2 f_1(\boldsymbol{a}) & \dots & D_n f_1(\boldsymbol{a}) \\ D_1 f_2(\boldsymbol{a}) & D_2 f_2(\boldsymbol{a}) & \dots & D_n f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\boldsymbol{a}) & D_2 f_m(\boldsymbol{a}) & \dots & D_n f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{a}) \\ \nabla f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Todas las propiedades algebraicas de la diferenciabilidad son inmediatas a partir de las correspondientes propiedades de los campos escalares. Enunciamos solamente la *regla de la cadena* en un resultado que generaliza todos los que hemos visto anteriormente.

Teorema 5.22 (Regla de la cadena) *Si $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ son campos vectoriales diferenciables, entonces $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ es otro campo vectorial diferenciable y $J(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})) \cdot J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$.*

En cada caso, la aplicación de la regla de la cadena da una serie de igualdades que permiten calcular las parciales de $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ a partir de las parciales de las componentes de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$. Veamos estas igualdades en un tipo concreto de composición. Si $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{g} = (g_1, \dots, g_m)$, $f \circ \boldsymbol{g}$ es un campo escalar en $\mathbb{R}^n$ y la regla de la cadena da las siguientes ecuaciones: (las damos con las dos notaciones introducidas)

$$D_k(f \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = D_1 f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))D_k g_1(\boldsymbol{a}) + D_2 f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))D_k g_2(\boldsymbol{a}) + \\ + \cdots + D_m f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))D_k g_m(\boldsymbol{a})$$

$$\frac{\partial (f \circ \boldsymbol{g})}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\frac{\partial g_1}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\frac{\partial g_2}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) + \\ + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\frac{\partial g_m}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})$$

Ya podemos enunciar el teorema de cambio de variable. Damos el enunciado solamente para campos de dos variables, aunque el resultado es válido para cualquier dimensión.

Teorema 5.23 *Sea $F\colon T(D) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, siendo D cerrado y acotado. Sea $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial biyectivo, salvo en un subconjunto de área nula, diferenciable y con las derivadas parciales continuas. Entonces:*

$$\iint\limits_{T(D)} F = \iint\limits_{D} (F \circ T)|\det(JT)|$$

Mientras que para las integrales de una variable, este teorema se utiliza fundamentalmente para el cálculo de primitivas para simplificar la función a integrar, en la integración múltiple lo utilizaremos fundamentalmente para describir de forma más sencilla la región de integración.

Ejemplo 5.2.4 Hemos mostrado más arriba el cambio a coordenadas polares:

$$T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Veamos como se transforma una integral al aplicar este cambio de variables. En primer lugar, calculamos el jacobiano de T:

$$JT(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el valor absoluto del determinante es: $|\det(JT(r, \theta))| = |r|$; y la fórmula de cambio de variable queda:

$$\iint\limits_{T(D)} F(x, y)dx\,dy = \iint\limits_{D} |r|F(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)|r|dr\,d\theta$$

En la integral de la izquierda, $T(D)$ representa a la región de integración descrita en coordenadas cartesians, mientras que D, en la integral de la derecha, representa a la misma región pero descrita en coordenadas polares.

5.2.3. Áplicaciones

Áreas planas

La forma más simple de expresar el área de una región plana D es:

$$\text{Área}(D) = \iint_D dxdy,$$

ya que está integral corresponde al volumen de un cilindro de base D y altura 1.

Área del grafo de campo

El área del superficie del grafo de un campo escalar diferenciable y con parciales continuas en un dominio D es

$$\iint_D \sqrt{1 + (D_1 f(x,y))^2 + (D_2 f(x,y))^2}\, dx\, dy$$

Ejercicios de clase

1. Hallar la integral doble de los campos indicados:

   a) $f(x,y) = (x+2y)^2$ sobre $R = [-1,2] \times [0,2]$.

   b) $f(x,y) = xy^3 e^{x^2y^2}$ sobre $R = [1,3] \times [1,2]$.

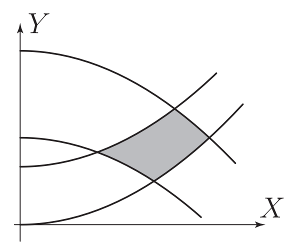
2. Esbozar la región sobre la que se integra, intercambiar el orden de integración y evaluar la integral

$$\int_0^1 \int_x^1 xy\,dy\,dx$$

3. Halle el área encerrada por la cardioide de ecuación $\rho = a(1+\cos\theta)$.

4. Utilice coordenadas polares para dibujar la región, D, encerrada por $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $x \geq 0$. Exprese en coordenadas polares la integral $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

5. Considérese la región, $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitada por las parábolas



$$\begin{aligned} y &= x^2+4 \quad , \quad y = x^2, \\ y &= 6-x^2 \quad , \quad y = 12-x^2 \end{aligned}$$

   Se pide:

   a) Definir una biyección $T\colon [6,12] \times [0,4] \to D$.

   b) Utilizar la biyección T para calcular la integral $\iint_D xy\,dxdy$

6. Calcular $\displaystyle\iint_R y\,dx\,dy$ donde R es la región limitada por la curva $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y(t) = a(1-\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y el eje OX.

7. Calcule la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ sobre el círculo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Relación de ejercicios

1. Consideremos la región del primer cuadrante encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = 1 - x^2$ y el eje OX. Se pide:

   a) Calcular valores aproximados del área de la región.

      1) Utilizando la suma superior en una partición del intervalo formada por 2 puntos.
      2) Utilizando la suma superior en una partición del intervalo formada por 3 puntos.
      3) Utilizando la suma superior en una partición del intervalo formada por 5 puntos.
      4) Utilizando la suma superior en una partición del intervalo formada por 9 puntos.
      5) Repita los apartados anteriores utilizando la suma inferior.

   b) Calcule el valor exacto del área de dos maneras distintas:

      1) Tomando límite sobre la suma de Riemman para una elección cualquiera sobre la partición $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$.
      2) Utilizando la regla de Barrow.

   c) Compare los resultados aproximados obtenidos en el primer apartado con el valor exacto obtenido en el segundo apartado y compruebe que se verifica la desigualdad: $L_P \leq A \leq U_P$.

2. Otro procedimiento similar al de las sumas de Riemman para acercarse de manera aproximada al valor de un área dada es utilizar trapecios en lugar de rectángulos. Para ello, consideramos una partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de un intervalo $[a, b]$ y construimos n trapecios de base $[x_{i-1}, x_i]$ y alturas $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$. Si sumamos el área de los trapecios obtenemos una aproximación del valor del área buscada.

   Utilice este procedimiento para aproximar el área de la región del ejercicio anterior y compruebe en cada apartado que la aproximación que proporciona este método es siempre mejor (está más cerca del verdadero valor) que la que proporcionan las sumas superiores e inferiores.

3. Calcule las siguientes integrales definidas

$$\text{a) } \int_0^1 x^3 e^x dx \qquad \text{b) } \int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos^2 x^2 dx$$
$$\text{c) } \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \qquad \text{d) } \int_2^5 \frac{dx}{x^2-1}$$
$$\text{e) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{f) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

4. Usar las propiedades de la integral definida y el teorema fundamental para hallar las siguientes derivadas:

$$\text{a) } \frac{d}{dt}\left(\int_1^t x^2 dx\right) \qquad \text{b) } \frac{d^2}{dt^2}\left(\int_2^t \sqrt{x^2+1}dx\right)$$
$$\text{c) } \frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{-t}^t \sqrt{3+4x^2}dx\right) \qquad \text{d) } \frac{d}{dt}\left(\int_1^{3t} \frac{1}{4+x^2}dx\right)$$
$$\text{e) } \frac{d}{dt}\left(\int_{t^2}^{t^3} \frac{1}{4+3x^2}dx\right)$$

5. Calcule el área del recinto determinado por la curva $y = x^3 - 16x$ y el eje de abscisas.

6. Halle el área determinada por las curvas $y = x^4 - 2x^2$ e $y = 2x^2$.

7. Halle el área encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

8. Calcule el área comprendida entre las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$.

9. Halle el área entre la curva $y = \sqrt{1-x}$ y los ejes de coordenadas.

10. Calcule el área limitada por la curva $x = 1 - y^2$ y el eje OY.

11. Calcule el área comprendida entre las curvas de ecuaciones $y = 2 - x^2$ e $y + x = 0$.

12. Calcule el área determinada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$.

13. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x > 0 \\ x+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

el eje OX y la ordenada $x = 5$.

14. Consideremos el área del primer cuadrante limitada por la curva $y = \sqrt{x}$, la recta $x + 4y - 12 = 0$ y el eje de abscisas. Se pide

    a) Calcular el área de la región.

    b) Calcular el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región alrededor del eje OX.

    c) Calcular el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región alrededor del eje OY.

15. Calcule el volumen de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OY la región comprendida entre curva $y^2 = x$ y la recta $x = 1$.

16. Consideremos la región A encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x$. Se pide:

    a) Hallar el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje OX.

    b) Hallar el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje OY.

17. Consideremos la región A del ejercicio anterior. Plantee las integrales definidas que permiten calcular los volúmenes de revolución que se indican:

    a) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $x = -1$

    b) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $x = 3$

    c) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $y = 2$

    d) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $y = -1$

18. Calcular el volumen del sólido de revolución que se engendra al girar alrededor del eje OX la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

    definida entre 1 y 5.

19. Calcule el volumen de un cono de altura h y radio r:

    a) Utilizando el método de discos.

    b) Utilizando el método de capas.

20. Calcule el volumen de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX la región comprendida entre curva $y^2 = x$ y la recta $x = 1$.

21. Calcule el volumen de revolución que se genera al hacer girar el círculo de ecuación $x^2 + y^2 + r^2$ alrededor de la recta $x = x_0$ en los siguientes casos:

    a) $x_0 = 0$

    b) $x_0 = k \geq 1$

22. Halle la distancia recorrida por un móvil entre $t = 0$ y $t = 2$, sabiendo que su posición en cada instante está dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t \\ y(t) = \operatorname{sen} t - t \cos t \end{cases}$$

23. Las coordenadas de un punto móvil vienen dadas en el instante t por las ecuaciones $x = t^2$, $y = t^3$. Encuentre la longitud del espacio recorrido entre $t = 0$ y $t = 2$.

24. Halle la longitud del arco de curva $y = x^{3/2}$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(4, 8)$.

25. Halle la longitud del arco de curva $9x^2 = 4y^3$ limitada por $(0, 0)$ y $(2\sqrt{3}, 3)$.

26. Calcule la longitud del arco de curva $y = 2x\sqrt{x} - 1$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

27. Halle la longitud de un sector de circunferencia de radio r y amplitud θ.

28. Calcule la longitud de la *hipocicloide* cuyas ecuaciones polares son $x = 2\cos^3\theta$, $y = 2\operatorname{sen}^3\theta$.

29. La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ gira alrededor de la recta $y = -2$. Halle el área de la superficie engendrada.

30. Calcule al área de la superficie engendrada al girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

31. Encuentre el área lateral de un cilindro de radio r y altura h.

32. Calcule el área de la superficie de una esfera de radio r.

33. Calcular mediante la definición la integral de línea, $\displaystyle\int_C x^2y^2dx + dy + zdz$ donde C es la circunferencia contenida en el plano $Z = 0$, centrada en el origen y de radio r.

34. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y, en su caso, calcular su valor:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)} \qquad \int_{-2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} \qquad \int_0^{\infty} e^{-2x} \cos ax\, dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} \qquad \int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{tg} x\, dx$$

$$\int_0^{2} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx \qquad \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2} \qquad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx$$

35. Hallar el área de la región limitada superiormente or $xy = 1$, $x > 0$, inferiormente por $y(x^2+1) = x$, y a la izquierda por $x = 1$.

36. Hallar la integral doble de los campos indicados:

    a) $f(x, y) = y^3 \cos^2 x$ sobre $R = [-\pi/2, \pi] \times [1, 2]$.

    b) $f(x, y) = x^2 + 2xy - y\sqrt{x}$ sobre $R = [0, 1] \times [-2, 2]$.

    c) $f(x, y) = xy + x/(y + 1)$ sobre $R = [1, 4] \times [1, 2]$.

    d) $f(x, y) = y^5 \operatorname{sen} x e^{y^3 \cos x}$ sobre $R = [0, 1] \times [-1, 0]$.

37. Esbozar la región sobre la que se integra, intercambiar el orden de integración y evaluar las siguientes integrales:

$$(a) \quad \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta\, dr\, d\theta \qquad (b) \quad \int_0^1 \int_{1-y}^1 (x+y^2)\, dx\, dy \qquad (c) \quad \int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

38. Aplicar el teorema de Fubini a la integral $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ para los siguientes conjuntos:

    a) El interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

    b) Interior de la curva $x^2 + y^2 - ax - 2ay + a^2 = 0$.

    c) Para $y \geq 0$, la región comprendida entre $x^2+y^2 = 16$ y $x^2+y^2 = 9$.

39. Calcule el área de la circunferencia de ecuación polar $\rho = 2s \cos\theta$.

40. Plantee la integral definida que permite calcular el área encerrada por la circunferencia centrada en el origen y de radio r, exterior a la cardioide de ecuación polar $\rho = r(1 - \cos\theta)$.

41. Halle el área de la región encerrada por la curva $\rho = 4 + \cos\theta$.

42. Pasando a coordenadas polares, calcular la integral:

$$\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy \right) dx$$

43. Calcular $\displaystyle\iint_R (y - x)\, dx\, dy$ donde R es la región limitada por las rectas $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = (-1/3)x + (7/9)$, $y = (-1/3)x + 5$.

44. Utilizando integrales dobles y un cambio de variable, demostrar que el área interior a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es πab.

45. Hallar la superficie del grafo del campo $f(x, y) = xy$ en la región $[0, 1] \times [0, 1]$.

46. El **teorema de Green** relaciona la integral de línea y la integral doble:

$$\int_C \boldsymbol{F} = \iint_D (D_1F_2 - D_2F_1)$$

donde: C es una curva regular a trozos, cerrada y simple de $\mathbb{R}^2$ recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj; D es la región interior de esta curva; $\boldsymbol{F}\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial diferenciable cuyas parciales son continuas y acotadas. Utilizar el teorema de Green en los siguientes ejercicios:

a) Calcular la integral $\int_C y^3dx + (x^3 + 3xy^2)dy$, donde C es la curva que va del punto $(1, 1)$ al punto $(0, 0)$ siguiendo la recta $Y = X$ y vuelve al punto $(1, 1)$ siguiendo la curva $Y = X^3$.

b) Calcular la integral de línea $\int_C 2xydx + (x^2 + 2x)dy$, donde C es la curva formada por la circunferencia $X^2 + Y^2 = 1$ recorrida en el sentido de las agujas del reloj y la elipse $(X/3)^2 + (Y/2)^2 = 1$ recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj. ¿Es posible utilizar el mismo método si cambiamos el sentido de giro de la circunferencia?

47. A partir del teorema de Green se deduce que el área encerrada por una curva cerrada y simple $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ es:

$$\left| \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt \right|$$

a) Calcular el área de la región encerrada por triángulo limitado por las rectas $X = 0$, $2X - 3Y = 0$ y $X + 3Y = 9$

b) Calcular el área de la región interior al lazo del folium de Descartes, es decir, la región limitada por la curva:

$$x(t) = \frac{3t}{t^3+1} \qquad , \qquad y(t) = \frac{3t^2}{t^3+1}$$

c) Deducir que el área de la región plana limitada por la curva cerrada y simple definida en coordenadas polares por $r = f(\theta)$, $\theta \in [a, b]$, es:

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta$$

d) Usar la fórmula anterior para calcular el área de la región interior de la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$.